

1. תרופה נסיונית מצליחה לרפא 70% מהחולים במחלה מסויימת. התרופה ניתנה ל-5 חולים. מצא את ההסתברויות

(א) שבדיוק 3 חולים יחלימו

(ב) שכל 5 החולים יחלימו

(ג) שלפחות 3 יחלימו

(ד) שלכל היותר 3 יחלימו

(ה) שאף אחד מה-5 לא יחלים

2. אנשים נכנסים לחנות מסויימת בקצב של 30 בשעה. על ידי הנחת התפלגויות פאוסון רלוונטיות מצא את ההסתברויות

(א) שבמשך 5 דקות לא יכנס אף אחד

(ב) שבמשך 5 דקות יכנסו לפחות 4 אנשים

(ג) שבמשך 10 דקות יכנסו לפחות 4 אנשים

מה היא התוחלת של מספר האנשים הנכנסים ב- n דקות ?

3. השווה את ההסתברויות $P(X = r)$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ בהתפלגויות $B(100, 0.01)$, $B(10, 0.1)$. $\mathcal{P}(1)$

בתהליך ייצור של פריט מסויים ההסתברות לפריט פגום הוא 1%. מה ההסתברות למצוא 3 או יותר פריטים פגומים מתוך מדגם של 100? פתור על ידי שימוש בהתפלגויות בינומית ובהתפלגות פאוסון.

4. אם

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{אם } X \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } X \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

מצא את ההתפלגות של Y

(א) כאשר ל- X מתפלג בינומית $B(n, \frac{1}{2})$ (רמז: $(1-1)^n = 0$).

(ב) כאשר ל- X מתפלג פאוסון $\mathcal{P}(\lambda)$.

5. הוכח על ידי אנדוקציה שאם X_1, X_2, \dots, X_r הם משתנים מקריים בלתי-תלויים עם התפלגות פאוסון עם פרמטרים $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, בהתאם, אזי ההתפלגות של הסכום

$$X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

היא גם פאוסון, עם פרמטר $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$.

6. כאשר מטילים קוביה תקינה, מה היא התוחלת

(א) של מספר התוצאות הקטנות מ-3 כאשר מטילים את הקוביה n פעמים ?

(ב) של מספר הפעמים שצריכים להטיל את הקוביה עד שמקבלים את התוצאה 3 ?

(ג) של מספר הפעמים שצריכים להטיל את הקוביה עד שמקבלים פעמיים תוצאה קטנה מ-3 ?

7. מה צריך להיות אורכה של סדרת ספרות מקריות כדי שהסתברות שהספרה 7 תופיע לפחות פעם אחת תהיה לפחות $\frac{9}{10}$? לסדרה באורך זה מה הן התוחלת והשונות של מספר הפעמים שמופיע הספרה 7 ?

8. הוכח שאם X הוא משתנה מקרי גאומטרי, אזי לכל $n, m \geq 1$

$$P(X = n + m | X > n) = P(X = m)$$

יש לתת הוכחה מתמטית וגם הסבר אינטואיטיבי. כמו כן, הוכח שאם X הוא משתנה מקרי בינומית שלילית אזי לכל $n, m \geq r$

$$P(X = n + m | X > n) < P(X = m)$$

9. בספר עם n עמודים יש במוצע λ שגיאות בכל עמוד. מה היא ההסתברות שיהיה לפחות עמוד אחד עם לפחות k שגיאות ? העזר במחשב למצוא את ה- n הכי קטן שעבורו ההסתברות של לפחות עמוד אחד עם לפחות 3 שגיאות היא לפחות 0.5, במקרים $\lambda = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

10. אם המשתנים המקריים X_1, X_2, \dots, X_n הם בלתי תלויים עם התפלגות אחידה

$$P(X_i = r) = \frac{1}{N+1}, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n$$

מצא את התפלגותם של $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ו- $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

11. אם המשתנים המקריים X, Y הם בלתי תלויים, שניהם עם התפלגות גאומטרית עם אותן פרמטר p , מצא את ההתפלגות של X בהנתן ש- $X + Y = n$. (n שלם כל שהוא גדול או שווה 2).

אם המשתנים המקריים X, Y הם בלתי תלויים, שניהם עם התפלגות גאומטרית עם פרמטרים שונים p, r , מצא את ההתפלגות של $\min(X, Y)$

12. אם המשתנים המקריים X, Y הם בלתי תלויים, שניהם עם התפלגות פאוסון עם פרמטרים שונים λ, μ , מצא את ההתפלגות של X בהנתן ש- $X + Y = n$. (n שלם כל שהוא גדול או שווה 0).

13. אם המשתנה המקרי X מתפלג פאוסון עם פרמטר λ , הוכח ש-

$$E[X(X-1)\dots(X-k)] = \lambda^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

והעזר בתוצאה זו למצוא את $E[(X-\lambda)^3]$ ואת $E[(X-\lambda)^4]$.

בהצלחה!