פתרון תרגיל בית 6 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

1. נגדיר: X – מס' החולים הנרפאים מהמחלה. מנתוני השאלה: $X \sim Bin(5,0.7)$.

א. $$P(X=3)=\binom{5}{3}0.7^3\cdot 0.3^2=\boxed{0.3087}$$

ב. $$P(X=5)=\binom{5}{5}0.7^5\cdot 0.3^0=\boxed{0.16807}$$

ג. $$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=\binom{5}{3}0.7^3\cdot 0.3^2+\binom{5}{4}0.7^4\cdot 0.3^1+\binom{5}{5}0.7^5\cdot 0.3^0=\boxed{0.837}$$

ד. $$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=1-P(X\ge 3)+P(X=3)$$
$$=1-0.837+0.3087=\boxed{0.472}$$

הערה: בשורה השנייה נעזרנו בתוצאות סעיפים ג' ו-א'.
אפשר כמובן לסכום ישירות את הסתברויות השורה הראשונה.

ה. $$P(X=0)=\binom{5}{0}0.7^0\cdot 0.3^5=\boxed{0.00243}$$

2. נגדיר: X – מס' האנשים הנכנסים לחנות בשעה. אזי: $X \sim Pois(30)$.

א. עבור 5 דקות נסמן: $X_5 \sim Pois(30/12)=Pois(2.5)$. ההסתברות המבוקשת:
$$P(X_5=0)=\frac{e^{-2.5}(2.5)^0}{0!}=e^{-2.5}=\boxed{0.082}$$

ב. $$P(X_5\ge 4)=1-P(X_5<4)$$
$$=1-\sum_{k=0}^{3}P(X_5=k)=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{e^{-2.5}(2.5)^k}{k!}=\boxed{0.2424}$$

ג. עבור 10 דקות נסמן: $X_{10} \sim Pois(30/6)=Pois(5)$. ההסתברות המבוקשת:
$$P(X_{10}\ge 4)=1-P(X_{10}<4)$$
$$=1-\sum_{k=0}^{3}P(X_{10}=k)=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{e^{-5}(5)^k}{k!}=\boxed{0.735}$$

3. השוואת התפלגויות: בינומית ופואסון.

כאשר $X \sim Bin(10,0.1)$, נחשב: $P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot 0.1^5\cdot 0.9^5=0.00149$

כאשר $Y \sim Bin(100,0.01)$, נחשב: $P(Y=5)=\binom{100}{5}\cdot 0.01^5\cdot 0.99^{95}=0.0029$

כאשר $Z \sim Pois(1)$, נחשב: $P(Z=5)=\frac{e^{-1}1^5}{5!}=0.00307$

נסיונות כנ"ל מלמדים שההתפלגות הבינומית מתקרבת להתפלגות הפואסונית, ככל ש- n גדל ו- p קטן, כאשר np קבוע, באופן ש- $Bin(n,p)\to Pois(\lambda=np)$.

4. נתון:

א. כאשר: $X \sim Bin(n,0.5)$. נניח ש- n זוגי (להקל על החישובים). $k=0,1,\dots n/2$.

$$P(Y=0)=P(X=even)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{2k}0.5^n=0.5^n\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{2k}=0.5^n\cdot 2^{n-1}=0.5$$

ולפיכך: $P(Y=1)=0.5$

ולבסוף מקבלים:

$$P(Y=0)=P(Y=1)=0.5$$

ב. כאשר: $X \sim Pois(\lambda)$.

$$P(Y=0)=P(X=even)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=e^{-\lambda}\cdot\frac{e^{-\lambda}+e^{\lambda}}{2}=\frac{e^{-2\lambda}+1}{2}$$

ולפיכך: $P(Y=1)=1-\frac{e^{-2\lambda}+1}{2}=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$

ולבסוף מקבלים:

$$P(Y=0)=\frac{e^{-2\lambda}+1}{2}$$

$$P(Y=1)=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

5. צ"ל: $(X_1+\ldots+X_r)\sim Pois(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)$

עבור $n=1$: $X_1\sim Pois(\lambda_1)$

עבור $n=2$: $X_1+X_2\sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$

הנחת האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור כל r מחוברים, נוכיח עבור $r+1$ מחוברים.

נסמן: $W_r=X_1+\ldots+X_r$, אזי

$$X_1+\ldots+X_r+X_{r+1}=W_r+X_{r+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה $W_r \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right) = Pois(\lambda')$

ולפי המקרה $n=2$: $W_r + X_{r+1} \sim Pois(\lambda' + \lambda_{r+1})$

לכן מתקיים: $W_r + X_{r+1} = X_1 + \ldots + X_{r+1} \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_i\right)$ מ.ש.ל.

6.

א. נגדיר: X – מספר הטלות הקובייה שיצאו קטנות מ-3 (כלומר תוצאה של $\{1,2\}$ בהטלה).

עבור n הטלות, X מתפלג בינומית עם הפרמטרים: $X \sim Bin\left(n, \frac{1}{3}\right)$

תוחלת של מ"מ X המתפלג בינומית היא $E[X] = np$, לכן:

$$E[X] = np = n \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{n}{3}}$$

ב. כעת מדובר בהתפלגות גיאומטרית, עם הסתברות להצלחה $P("3") = \frac{1}{6}$.

נגדיר: Y – מספר הטלות הקובייה עד שיצא "3" לראשונה. אזי: $Y \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$

תוחלת של מ"מ (Y) המתפלג גיאומטרית עם פרמטר p, היא $E[Y] = \frac{1}{p}$, לכן:

$$E[Y] = \frac{1}{1/6} = \boxed{6}$$

ג. כעת מדובר בהתפלגות בינומית שלילית, אנו סופרים נסיונות עד הצלחה שנייה.

כלומר: $Z \sim NB\left(r=2, p=\frac{1}{3}\right)$ – נסיונות עד הצלחה שנייה. מכאן שהתוחלת:

$$E[Z] = \frac{r}{p} = \frac{2}{1/3} = \boxed{6}$$

לחילופין, זהו גם סכום שני משתנים בלתי תלויים ושווי התפלגות, מהתפלגות גאומטרית.

כלומר: $U,V \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$ והתוחלת: $E[U+V] = E[U] + E[V] = \frac{1}{1/3} + \frac{1}{1/3} = \boxed{6}$

7. נגדיר את המ"מ X – המונה את הספרות המקריות שבמספר עד שהספרה "7" יצאה בפעם הראשונה.

אזי: $X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)$

ההסתברות שב- n הספרות הראשונות לא ייצא "7" אפילו פעם אחת ב- n ספרות, היא:

$$P(X>n)=(1-p)^n=0.9^n$$

אנו מתבקשים למצוא n כזה כך ש-: $P(X>n)=0.9^n\geq 0.9$. נפתור את האי-שוויון עבור n:

$$1-0.9^n\geq 0.9$$

$$0.1\geq 0.9^n$$

$$\ln 0.1\geq n\ln 0.9$$

$$\frac{\ln 0.1}{\ln 0.9}\leq n$$

$$21.854\leq n$$

$$\boxed{n=22}$$

<u>דרך נוספת</u>:

נפעל דרך המאורע המשלים. נגדיר את המאורע A_n – הספרה "7" לא תופיע במספר באורך n ספרות.

אזי: $P(A_n)=\left(1-\frac{1}{10}\right)^n=0.9^n$.

אנו רוצים למצוא n כזה כך ש-: $1-P(A_n)=1-0.9^n\geq 0.9$.

בפתרון מקבלים כמובן אותו n כנ"ל.

לחישוב התוחלת והשונות – נעזר בכך שמספר ספרות "7" המופיעים ב- 22 נסיונות מתפלג:

$Y\sim Bin\left(22,\frac{1}{10}\right)$. כעת, בעזרת נוסחאות התוחלת והשונות של התפלגות בינומית מקבלים:

$$E[X]=22\cdot 0.1=\boxed{2.2}$$

$$V[X]=22\cdot 0.1\cdot 0.9=\boxed{1.98}$$

8. נתון: $X\sim G(p)$.   <u>צ"ל</u>: $P(X=n+m\mid X>n)=P(X=m)$.

הוכחה:

נעזר בנוסחה $P(X>n)=(1-p)^n$.

כעת,

$$P(X=n+m\mid X>n)=\frac{P(X=n+m,X>n)}{P(X>n)}=\frac{P(X=n+m)}{P(X>n)}$$

$$=\frac{(1-p)^{n+m-1}p}{(1-p)^n}=(1-p)^{m-1}p=P(X=m)$$

מ.ש.ל.

הערה: זוהי תכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות הגיאומטרית.

<u>הסבר</u>: בגלל המבנה המתמטי של פונקציית ההסתברות, רואים כי ההסתברות להצלחה ראשונה בניסיון ה- $n+m$ בהינתן שב- n הנסיונות הראשונים לא הייתה הצלחה, שקול לכך שרצף הנסיונות מתחיל מהמקום ה- $n+1$ ובעל אורך של m נסיונות עד ההצלחה הראשונה.

9. מספר השגיאות (X) בעמוד מתפלג $X \sim Pois(\lambda)$.

ההסתברות שבעמוד יהיו לפחות k שגיאות היא: $p_k = P(X \ge k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

מספר העמודים (Y) עם לפחות k שגיאות מתוך כל n עמודי הספר מתפלג $Y \sim Bin(n, p_k)$.

לפיכך ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0}(p_k)^0(1-p_k)^n = 1 - (1-p_k)^n$$

$$= \boxed{1 - \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)^n}$$

10. נתון שהמשתנים המקריים <u>בלתי תלויים</u> <u>ושווי התפלגות</u>. נחשב עבור המקרה הכללי.

התפלגות המקסימום:

$$\begin{aligned} P(\max(X_1,...,X_n) \le x) &= P(X_1 \le x,...,X_n \le x) \\ &= P(X_1 \le x)\cdots P(X_n \le x) \\ &= [P(X_1 \le x)]^n \end{aligned}$$

התפלגות המינימום:

$$\begin{aligned} P(\min(X_1,...,X_n) \le x) &= 1 - P(X_1 > x,...,X_n > x) \\ &= 1 - [P(X_1 > x)\cdots P(X_n > x)] \\ &= 1 - [1 - P(X_1 \le x)]^n \end{aligned}$$

במקרה שלנו נתון שהמשתנים מהתפלגות אחידה בדידה: $P(X_i = r) = \frac{1}{1+N} \qquad r = 0,1,...,N$

כלומר: $P(X_i \le r) = \frac{r+1}{N+1}$, ולכן:

$$P(\max(X_1,...,X_n) \le x) = [P(X_1 \le x)]^n = \boxed{\left[\frac{r+1}{N+1}\right]^n}$$

$$P(\min(X_1,...,X_n) \le x) = 1 - [1 - P(X_1 \le x)]^n = \boxed{1 - \left[1 - \frac{r+1}{N+1}\right]^n}$$

11.

א. נתון ש- X,Y מ"מ בלתי-תלויים ושווי התפלגות, המתפלגים $X,Y \sim G(p)$.

צריך למצוא את התפלגות: $P(X \mid X+Y=n)$.

נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנה:

$$P(X=x\,|\,X+Y=n)=\frac{P(X=x,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{P(X=x,Y=n-x)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=x)P(X=n-x)}{\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)P(Y=n-k)}$$

$$=\frac{q^{x-1}p\cdot q^{n-x-1}p}{\sum_{k=1}^{n-1}\left(q^{k-1}p\cdot q^{n-k-1}p\right)}=\frac{q^{x-1}q^{n-x-1}}{\sum_{k=1}^{n-1}\left(q^{k-1}q^{n-k-1}\right)}$$

$$=\frac{q^{n-2}}{\sum_{k=1}^{n-1}q^{n-2}}=\frac{q^{n-2}}{(n-1)q^{n-2}}=\boxed{\frac{1}{n-1}}$$

הערה: את המכנה אפשר היה לחשב גם ע"י שימוש בהתפלגות הבינומית שלילית (NB).

ב. נתון ש- X,Y מ"מ בלתי-תלויים המתפלגים $X\sim G(p),Y\sim G(r)$. אזי:

$$P(\min(X,Y)\le k)=1-P(X>k,Y>k)=1-\left[P(X>k)P(Y>k)\right]$$

$$=1-(1-p)^k(1-r)^k=\boxed{1-\left[(1-p)(1-r)\right]^k}$$

12. נתון ש- X,Y מ"מ בלתי-תלויים המתפלגים $X\sim Pois(\lambda),Y\sim Pois(\mu)$.

כמו כן, עבור התפלגות פואסון מתקיימת תכונת החיבוריות: $X+Y\sim Pois(\lambda+\mu)$, אזי:

$$P(X=x\,|\,X+Y=n)=\frac{P(X=x,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{P(X=x,Y=n-x)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=x)P(X=n-x)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right]\cdot\left[\frac{e^{-\mu}\mu^{n-x}}{(n-x)!}\right]}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}}$$

$$=\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-x}$$

$$=\boxed{\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-x}}$$

וזוהי התפלגות בינומית עם הפרמטרים: $Bin\left(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

13. נתון: $X \sim Pois(\lambda)$.

הוכחת השוויון המבוקש:

$$E\left[X(X-1)\dots(X-k)\right]=E\left[\prod_{i=0}^{k}(X-i)\right]$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k}(X-i)\right)P(X=r)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k}(r-i)\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{(r-k-1)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{(r-k-1)!}$$
$$=e^{-\lambda}\lambda^{k+1}\sum_{r=k-1}^{\infty}\frac{\lambda^{r-k-1}}{(r-k-1)!}=e^{-\lambda}\lambda^{k+1}\cdot e^{\lambda}=\boxed{\lambda^{k+1}}$$