

ניתן להשתמש במחשב לחשב אנטגרלים! אבל כמובן במבחן יהיה צורך לחשב ידנית.

1. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = c(1 - x^2), \quad 0 < x < 1.$$

מצא את c , את פונקציית ההצטברות של X , את התוחלת ואת השונות של X , ואת ההסתברות $P(X \leq \frac{1}{2})$. מצא גם את a כך ש- $P(X \leq a) = \frac{1}{2}$ (תשובה: $a = 2 \cos(\frac{4\pi}{9})$).

2. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad |x| < a,$$

כאשר a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את הקבוע c , ואת התוחלת ואת השונות של X .

ב. חשב את ההסתברויות $P(0 \leq X \leq a)$ ו- $P(|X| \leq \frac{a}{2})$.

3. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצטברות

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^a & x > c \end{cases}$$

כאשר a ו- c הם פרמטרים חיוביים. מצא את פונקציית הצפיפות של X . מצא גם את התוחלת של X בהנחה ש- $a > 1$. מה אם $a < 1$? מה אפשר להגיד לגבי סטיית התקן של X ?

4. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצטברות

$$F(x) = b + c \arctan(x/a) \quad x \in \mathbf{R}$$

כאשר a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את הקבועים b ו- c .

ב. מצא את פונקציית הצפיפות של X .

ג. מצא את ההסתברות $P(-a \leq X \leq a) - P(-2a \leq X \leq 2a)$ (ההתפלגות הזאת נקראת "התפלגות קושי").

5. למשתנה המקרי X המוגדרת בשאלה 1,

א. מה הוא התחום של ערכים של המשתנה המקרי $Y = 1/(1 + X)$?

ב. מצא את פונקציית הצפיפות של Y .

ג. על ידי התשובות לסעיפים הקודמים מצא את התוחלת ואת השונות של Y .

חזור על שאלה זו למקרה ש- Y מוגדר על ידי $Y = (X - \frac{1}{2})^2$.

6. לזוג המשתנים המקריים X, Y יש צפיפות משותפת

$$f(x, y) = c(x + 2y)e^{-x-y}, \quad x, y > 0$$

כאשר c הוא קבוע

(א) מצא את c .

(ב) מצא את הסתברות ש- $Y > X$.

(ג) מצא את ההתפלגות השולית של Y .

(ד) מצא את התוחלת ואת השונות של המ"מ XY .

(ה) מצא את ההתפלגות של $Z = \min(X, Y)$. האם ניתן למצוא את התוחלת ואת השונות של Z בלי לחשב את ההתפלגות שלו? איזה אנטגרלים יש לחשב (לא צריך לחשב אותם!)

7. למשתנים המקריים הבלתי תלויים X, Y יש אותה צפיפות

$$f(x) = \frac{1}{2}ce^{-c|x|}, \quad x \in \mathbf{R}$$

כאשר c הוא קבוע חיובי. מצא את ההתפלגות של הסכום $X + Y$.

8. אם המשתנים המקריים הרציפים X, Y הם בלתי תלויים, עם צפיפויות ידועות $f_X(x), f_Y(y)$, מצא את הצפיפויות של המשתנים המקריים $U = XY$ ו- $V = X/Y$.

בהצלחה!