פתרון תרגיל בית 8 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

.1

א. נתון: $X \sim U(-1,2)$. לכן: $f_X(x)=\frac{1}{3} \quad : -1<x<2$

$$P(X>2)=\boxed{0}$$

$$P(0<X<1)=\int_0^1 \frac{1}{3}dx=\frac{x}{3}\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(-2<X<0)=\int_{-2}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{x}{3}\Big]_{-1}^{0}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

ב. נתון: $X \sim Exp(\lambda)$. לכן: $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad : 0\le x$

$$P(X>2)=\int_2^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big]_2^\infty=\boxed{e^{-2\lambda}}$$

$$P(0<X<1)=\int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big]_0^1=\boxed{1-e^{-\lambda}}$$

$$P(|X-3|<1)=P(2<X<4)=\int_2^4 \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big]_2^4=\boxed{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}$$

.2 נתון: $X \sim U(0,5)$. לכן: $F_X(x)=\frac{x}{5} \quad : 0<x<5$

א. כדי ששורשי המשוואה יהיו ממשים צריך להתקיים, הדיסקרימיננטה צריכה להיות אי-שלילית:

$$(4X)^2-4\cdot 4\cdot(X+2)\ge 0 \quad \Leftrightarrow 16X^2-16X-32\ge 0 \quad \Leftrightarrow (X-2)(X+1)\ge 0$$

ההסתברות לכך:

$$P(X>2\cup X<-1)=1-P(-1<X<2)=1-\left[\underbrace{F_x(2)}_{2/5}-\underbrace{F_x(-1)}_{0}\right]=\boxed{\frac{3}{5}}$$

ב. נמצא את ההסתברות שלפחות שורש אחד יהיה גדול מ- 1.

נוסחת השורשים:

$$X_{1,2}=\frac{-4X\pm\sqrt{16X^2-16(X-2)}}{8}=\frac{-X\pm\sqrt{X^2-X-2}}{2}$$

כעת, נרצה ששורש אחד לפחות (השורש הגדול) יהיה גדול מ-1:

$$\frac{-X\pm\sqrt{X^2-X-2}}{2}>1 \qquad \Leftrightarrow \qquad X<-\frac{6}{5}$$

וההסתברות המבוקשת: $P\left(X<-\frac{6}{5}\right)=\boxed{0}$

3. נתון: $X \sim Exp(0.5)$ – זמן התיקון בשעות.

ההסתברות שהבעיה תימשך יותר משעתיים:

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)=1-\left(1-e^{-0.5\cdot 2}\right)=\boxed{e^{-1}=0.3679}$$

ההסתברות שהבעיה תימשך יותר משעה, בהינתן שהיא קיימת אחרי 6 שעות:

$$P(X\ge 7\,|\,X>6)=P(X\ge 1)=1-F_X(1)=1-\left(1-e^{-0.5\cdot 1}\right)=\boxed{e^{-0.5}=0.6065}$$

הערה: נעזרנו בתכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית.

4. נעזר בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית:

א. $P(X<c)=0.95 \qquad =\Phi(c)=0.95 \qquad \Rightarrow \Phi^{-1}(c)=Z_{0.95}=1.645$

ב. $P(X\ge c)=0.01 \quad =1-\Phi(c)=0.01 \quad =-\Phi(c)=0.99 \qquad \Rightarrow Z_{0.99}=-2.326$

ג. $P(0<X<c)=0.4 \quad =\Phi(c)-\Phi(0)=0.4 \quad =\Phi(c)-0.5=0.4$

$=\Phi(c)=0.90 \qquad \Rightarrow Z_{0.90}=1.282$

5. נתון: $X \sim N(68,3^2)$ – משקל סטודנט.

הערה: למרות שמשקל סטודנט מתפלג נורמלית (שהוא משתנה רציף), נניח שהמשקל נמדד בקילוגרמים שלמים בלבד (משתנה בדיד) ונשתמש בתיקון רציפות בפתרון על מנת להדגים השימוש בו.

א. $$P(X>72)=1-\Phi\left(\frac{72+0.5-68}{3}\right)=1-\Phi(1.5)=1-0.9332=\boxed{0.0668}$$

ב. $$P(X\le 64)=\Phi\left(\frac{64+0.5-68}{3}\right)=\Phi(-1.1667)=\boxed{0.1217}$$

ג. $$\begin{aligned}P(65\le X\le 71)&=P(X\le 71)-P(X\ge 65)\\&=\Phi\left(\frac{71+0.5-68}{3}\right)-\Phi\left(\frac{65-0.5-68}{3}\right)\\&=\Phi\left(\frac{7}{6}\right)-\Phi\left(-\frac{7}{6}\right)=2\Phi\left(\frac{7}{6}\right)-1=\boxed{0.7567}\end{aligned}$$

ד. $$P(X=68)=\Phi\left(\frac{68+0.5-68}{3}\right)-\Phi\left(\frac{68-0.5-68}{3}\right)=\Phi\left(\frac{1}{6}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{1}{6}\right)-1=\boxed{0.1324}$$

6. נתון: $X\sim U(1,5)$. צריך למצוא את הצפיפות וההתפלגות המצטברת של $Y=\frac{X}{5-X}$.

ההתפלגות המצטברת של X המתפלג $U(1,5)$: $F_X(x)=\frac{x-1}{5-1}=\frac{x-1}{4}$

התחום של y:

$$1<X<5 \;\Leftrightarrow 0<5-X<4 \;\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{5-X}<\infty \qquad \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4}<\frac{X}{5-X}<\infty}$$

ההתפלגות המצטברת של Y:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{X}{5-X}\le y\right)\overset{(*)}{=}P\left(X\le\frac{5y}{1+y}\right)$$

(*) המעבר נעשה עי מציאת הפונקציה ההופכית:

$$y=\frac{x}{5-x}\Leftrightarrow y(5-x)=x\Leftrightarrow 5y=x+yx\Leftrightarrow 5y=x(1+y)\Leftrightarrow x=\frac{5y}{1+y}$$

ולכן: $$F_Y(y)=F_X\left(\frac{5y}{1+y}\right)=\frac{\frac{5y}{1+y}-1}{4}=\frac{5y-(1+y)}{4(1+y)}=\boxed{\frac{4y-1}{4(1+y)}}$$

הצפיפות מתקבלת מגזירת פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$\frac{dF_Y(y)}{dy}=\left(\frac{4y-1}{4(1+y)}\right)'=\frac{4\left[4(1+y)\right]-4(4y-1)}{\left[4(1+y)\right]^2}=\boxed{\frac{3}{4(1+y)}}$$

נכתוב במפורש את הפונקציות שהתקבלו:

$$F_Y(y)=\begin{cases}\frac{4y-1}{4(1+y)} & ,y>\frac{1}{4}\\ 0 & ,else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4(1+y)^2} & ,y>\frac{1}{4}\\ 0 & ,else\end{cases}$$

7. נתון: X,Y מ"מ בלתי תלויים ושווי התפלגות, המתפלגים $X,Y\sim Exp(\lambda)$.

א. נסמן: $T=1-e^{-\lambda X}$.

$$P_T(T\le t)=P_X\left(1-e^{-\lambda X}\le t\right)=P_X\left(X\le-\frac{\ln(1-t)}{\lambda}\right)=F_X\left(-\frac{\ln(1-t)}{\lambda}\right)$$

$$=1-e^{-\lambda\left(-\frac{\ln(1-t)}{\lambda}\right)}=1-e^{\ln(1-t)}=1-(1-t)=t$$

התחום של T:

$$0\le x<\infty \qquad \Rightarrow 0\le T=1-e^{-\lambda X}<1$$

מכאן:

$$F_T(t)=\begin{cases}t & ,0\le t<1\\ 0 & ,else\end{cases}$$

קיבלנו שזוהי ההתפלגות האחידה $U(0,1)$.

ב. נסמן: $T=\min(X,Y)$.

$$P\left(\min(X,Y)\le t\right)=1-P\left(X>t,Y>t\right)=1-P\left(X>t\right)P\left(Y>t\right)$$
$$=1-\left[1-F_X(t)\right]\left[1-F_Y(t)\right]$$
$$=1-\left[1-F_X(t)\right]^2=1-\left[1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right]^2$$
$$=1-e^{-2\lambda t}$$

התחום של $T=\min(X,Y)$ זהה לתחום של X (השווה לתחום של Y).

מכאן:

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda t} & ,0\le t<\infty\\ 0 & ,else\end{cases}$$

קיבלנו שזוהי התפלגות מעריכית עם הפרמטר $Exp(2\lambda)$.

ג. נסמן: $T=X-Y$.

בדרך הישירה נפריד בין המקרים: $t=x-y\ge 0$ ו- $t=x-y<0$.

עבור $t\le 0$:

$$F_T(t)=P(T\le t)$$
$$=P(X-Y\le t)$$
$$=P(Y\ge x-t)$$
$$=\int_0^\infty\int_{x-t}^\infty f_X(x)\,f_Y(y)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left(\int_{x-t}^\infty \lambda e^{-\lambda y}dy\right)dx$$
$$=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda(x-t)}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{\lambda t}$$

עבור $t>0$:

$$\begin{aligned}F_T(t) &= P(T\le t)\\ &=1-P(T>t)\\ &=1-P(X-Y>t)\\ &=1-P(Y<x-t)\\ &=1-\int_t^{\infty}\int_0^{x-t} f_X(x)\, f_Y(y)\,dy\,dx\\ &=1-\int_t^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\left(\int_0^{x-t}\lambda e^{-\lambda y}dy\right)dx\\ &=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\left[1-e^{-\lambda(x-t)}\right]dx\\ &=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

ובסיכומו של דבר:

$$F_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda t} & ,t\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t} & ,t>0\end{cases}$$

קיבלנו שזוהי התפלגות לפלס עם הפרמטרים $Laplace\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$.

<u>דרך נוספת - ע"י קונבולוציה:</u>

גם כאן יש צורך להפריד בין המקרים: $t\le 0$ ו- $t>0$.

הצפיפות עבור $t\le 0$:

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(x-t)\,dx$$

$$\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}\cdot\lambda e^{-\lambda(y+t)}dx$$

$$=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}$$

ובאופן סימטרי ניתן לחשב את הצפיפות עבור $t>0$.

בסיכומו של דבר הצפיפות המתקבלת:

$$f_T\left(t\right)=\frac{\lambda}{2}e^{\lambda|t|}\quad ,-\infty<t<\infty$$

8. נתון: $Z\sim N\left(0,1\right)$.

מציאת התפלגות $Y=|Z|$:

$$F_Y\left(y\right)=P_Y\left(Y\le y\right)=P_Y\left(|Z|\le y\right)=P_Z\left(-y\le Z\le y\right)$$
$$=\Phi_Z\left(y\right)-\Phi_Z\left(-y\right)=\Phi_Z\left(y\right)-\left[1-\Phi_Z\left(y\right)\right]=2\Phi_Z\left(y\right)-1$$

<u>הצפיפות</u> מתקבלת מגזירת פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$f_Y\left(y\right)=\frac{d}{dy}F_Y\left(y\right)=\frac{d}{dy}\left[2\Phi_Z\left(y\right)-1\right]=2f_z\left(y\right)$$

כלומר:

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & ,y\ge 0\\ 0 & ,else\end{cases}$$

<u>התוחלת</u>:

$$E\left[Y\right]=\int_0^\infty y\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\qquad\left\{u=\frac{y^2}{2};\ du=ydy\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-u}du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{u}\right]_0^\infty=\boxed{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}}$$

השונות:

חישוב עזר:

$$E\left[Y^2\right]=\int_0^\infty y^2\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad \left\{\begin{matrix} u=y & ;du=dy \\ v=-e^{-\frac{y^2}{2}} & ;dv=ye^{-\frac{y^2}{2}}\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-ye^{-\frac{y^2}{2}}\right]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{0-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right\}=1$$

מכאן:

$$V[Y]=E\left[Y^2\right]-\left(E[Y]\right)^2=1-\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)=\boxed{1-\frac{2}{\pi}}$$

<u>כעת עבור:</u> $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ – נמצא את התפלגות $Y=\left|X\right|$:

$$F_Y(y)=P_Y(Y\le y)=P_Y\left(\left|X\right|\le y\right)=P_Z(-y\le X\le y)$$

$$=\Phi_Z\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_Z\left(\frac{-y-\mu}{\sigma}\right)$$

<u>הצפיפות</u> מתקבלת מגזירת פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}\left[\Phi_Z\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_Z\left(\frac{-y-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)}\qquad ,y\ge0$$

9. נתון: $X,Y \sim N(0,1)$ – מ"מ בלתי תלויים.

נסמן: $Z = \frac{X}{Y}$.

התחום של Z: $-\infty < z < \infty$.

נשתמש בהצבה: $zy = x$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \, f_X(zy) \, f_Y(y) \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(zy)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{y^2(z^2+1)}{2}} dy \qquad \left\{u = y^2;\, du = 2ydy\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u(z^2+1)}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-2}{(z^2+1)} e^{-\frac{u(z^2+1)}{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{(z^2+1)} = \boxed{\frac{1}{\pi} \frac{1}{(z^2+1)}}$$

קיבלנו שזוהי התפלגות קושי הסטנדרטית.

<u>התפלגות</u> $X^2 + Y^2$:

תחילה נמצא את הצפיפות של X^2 :

$$F_{X^2}(u) = P_{X^2}\left(X^2 \le u\right) = P_X\left(-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}\right)$$

$$= F_X\left(\sqrt{u}\right) - F_X\left(-\sqrt{u}\right)$$

הצפיפות מתקבלת מגזירת פונקציית ההתפלגות:

$$f_{X^2}(u) = \frac{d}{du} F_{X^2}(u) = \frac{d}{du}\left[F_X\left(\sqrt{u}\right) - F_X\left(-\sqrt{u}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[f_X\left(\sqrt{u}\right) + f_X\left(-\sqrt{u}\right)\right] \qquad ,u \ge 0$$

נציב את הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית ונקבל:

$$f_{X^2}(u)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}e^{-\frac{u}{2}} & ,u\ge 0\\ 0 & ,else\end{cases}$$

מטעמי סימטריה, זוהי גם הצפיפות של Y^2.

ניתן לזהות צפיפות זו כצפיפות של התפלגות גמה עם הפרמטרים: $\alpha=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{2}$.

כעת נשתמש בקונבולוציה למצוא את התפלגות X^2+Y^2 כסכום של שני מ"מ בלתי תלויים:
נסמן: $U=X^2+Y^2$.

$$\begin{aligned}f_U(u)&=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X^2}(u-s)\, f_{Y^2}(s)\,ds\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{u-s}}e^{-\frac{(u-s)}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{s}{2}}ds\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{(u-s)^{-\frac{1}{2}}}{2}e^{-\frac{(u-s)}{2}}\frac{s^{-\frac{1}{2}}}{2}e^{-\frac{s}{2}}ds\\ &=\frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}}\end{aligned}$$

ולבסוף מקבלים:

$$f_{X^2}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}} & ,u\ge 0\\ 0 & ,else\end{cases}$$

לפי משפט היחידות ניתן לזהות צפיפות זו כצפיפות של התפלגות גמה עם הפרמטרים: $\alpha=1,\lambda=\frac{1}{2}$,

או לחילופין התפלגות חי-בריבוע עם 2 דרגות חופש.

<u>הערה</u>: אפשר לחשב את הנ"ל גם בדרכים נוספות כגון - שימוש בפונקציה יוצרת מומנטים; שימוש בטרנספורמציה ומעבר לקואורדינטות קוטביות; ואף שימוש בתכונת החיבוריות של התפלגות גמה.

10. נתון: $X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim \Gamma(\omega,1)$.

מהנתונים ניתן לרשום את הצפיפות של Y: $f_Y(y)=\omega e^{-\omega y}$, כלומר צפיפות של התפלגות מעריכית.

<u>דרך I – על ידי שימוש באירועים שקולים (הסתברותית)</u>

כעת, אם מדובר ב- ω יחידות זמן, אזי התפלגות פואסון המתאימה היא $X_\omega \sim Pois(\lambda\omega)$, לכן:

$$P(Y\le 1)=1-P(Y>1)=1-P(X_\omega\le 0)=P(X_\omega\ge 1)$$

$$=1-\frac{e^{-\lambda\omega}(\lambda\omega)^0}{0!}=1-e^{-\lambda\omega}$$

(*) הסבר: ההסתברות שהזמן עד שיקרה המאורע הראשון גדול מיחידת זמן אחת (לפי ההתפלגות המעריכית), שקולה להסתברות שבפרק זמן זה היו 0 מופעים (לפי התפלגות פואסון), כאשר התייחסנו ל- ω יחידות זמן כאל יחידת זמן אחת "גדולה".

אם נחשב בעזרת ההתפלגות $\Gamma(\omega,1)$:

$$P(Y\le\lambda)=\int_0^\lambda \omega e^{-\omega y}dy=1-e^{-\omega\lambda}$$

וקיבלנו אותו ביטוי כנ"ל.

לפיכך מתקיים: $P(X\ge\omega)=P(Y\le\lambda)$.

<u>דרך II – על ידי חישוב אלגברי נראה את הקשר בין התפלגות פואסון וגמה</u>

עבור התפלגות פואסון עם פרמטר λ , t יחידות זמן ו- n מופעים – מתקיים:

$$P(Y_n\le t)=P(X_t\ge n)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X_t=i)$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

כעת נגזור את הביטוי להסתברות שקיבלנו ונבחן את הצפיפות המתקבלת:

$$f_Y(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left[e^{-\lambda t}k(\lambda t)^{k-1}\lambda\right]-\left[\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\right]}{k!}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

וקיבלנו את הצפיפות של התפלגות גמה עם הפרמטרים $\Gamma(n,\lambda)$