

1. אם X הוא משתנה מקרי חיובי עם תוחלת 50, מצא, על ידי אי-שיויון מרקוב, חסם על $P(X \geq 74)$. אם גם יודעים שהשונות של X היא 25, העזר באי-שיויון צ'ביצ'ב למצוא חסם על $P(40 < X < 60)$.

2. אם X הוא משתנה מקרי עם גם תוחלת וגם שונות 20, מה ניתן להגיד על $P(0 \leq X \leq 40)$?

3. מחלקים n כדורים בין n כדים באופן אקראי וללא תלות בין הכדורים. יהא X מספר הכדורים בכד הראשון. המספר m מוגדר להיות השלם הכי קטן כך ש-

$$P(X \geq m) \leq \frac{1}{n^2}$$

(m כמובן תלוי על n). העזר בניסויים במחשב למצוא ערכים של m עבור n קטן. מצא באופן אנליטי או חסם על m או קירוב ל- m כאשר n גדול.

4. אם X_1, X_2, \dots, X_{20} הם מ"מים בלתי תלויים המתפלגים פואסון עם תוחלת 1,

(א) העזר באי-שיויון מרקוב למצוא חסם על $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right)$

(ב) העזר במשפט הגבול המרכזי למצוא אומדן ל- $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right)$

5. מטילים קובייה הוגנת 100 פעמים. העזר במשפט הגבול המרכזי למצוא אומדן ל- a שהוא המספר הכי קטן כך שהסיכוי שסכום התוצאות יעלה על a הוא לא יותר מ- 1%.

6. כאשר מחשבים את הסכום של 10^8 מספרים, אחרי כל פעולת "סכום" (של שני מספרים) מעגלים את התוצאה, כלומר מוסיפים לסכום משתנה מקרי המתפלג אחיד על הקטע $(-0.5 \times 10^{-6}, 0.5 \times 10^{-6})$. בהנחה שאין תלות בין העיגולים, מצא את ההסתברות שיש טעות בתוצאה הסופית של יותר מ- 10^{-2} .

7. (א) מצא את פונקציה יוצרת המומנטים של משתנים מקריים עם התפלגות פאוסון, גאומטרי ומעריכי.

(ב) העזר בתוצאת סעיף (א) במקרה של פאוסון להוכיח שההתפלגות של סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים פאוסוניים הוא גם פאוסוני.

(ג) העזר בתוצאת סעיף (א) במקרה של גואמטרי למצוא את פונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי עם התפלגות בינומית שלילית.

(ד) העזר בתוצאת סעיף (א) במקרה של מעריכי למצוא את פונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי עם התפלגות גמה. מה לגבי המקרה שהפרמטר בהתפלגות גמה אינו שלם?

8. (א) העזר בפונקציית יוצרת המומנטים למצוא את $E[(X - E[X])^3]$ ואת $E[(X - E[X])^4]$ במקרה ש- $X \sim B(n, p)$.

(ב) העזר בפונקציית יוצרת המומנטים למצוא את $E[(X - E[X])^3]$ ואת $E[(X - E[X])^4]$ במקרה ש- $X \sim N(\mu, \sigma)$.

(ג) האם הנוסחאות שקבלת בסעיף (א) שואפים לנסחאות שמצאת בסעיף (ב) בגבול ש-
 $n \rightarrow \infty$? נמק!

הערה: הכמויות $E[(X - E[X])^n]$ נקראים "מומנטים מרכזיים של המ"מ X ".

9. מטילים קוביה הוגנת 300 פעמים. מצא, בערך, את ההסתברויות שמספר הפעמים שמקבל-
ים או 1 או 2 הוא

(א) מעל 90,

(ב) לא יותר מ-105,

(ג) בין 85 ובין 115 (בין ממש).

10. רכיב מסויים במכשיר נכשל, בממוצע, פעם ב-24 שעות. כמה חלקי חילוף יש לשמור במלאי
כך שההסתברות שיהיו מספיק לשבוע שלם היא לפחות 95%? יש לענות גם על ידי חישוב
מדויק בהתפלגות פאוסון וגם על ידי שימוש במשפט הגבול המרכזי, עם תיקון רציפות
מתאים.

בהצלחה!