# פתרון תרגיל בית 9 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

1. נתון: $E[X]=50$.

לפי אי שוויון מרקוב: $P(X\geq 74)\leq \frac{50}{74}=0.6757$

כעת נתון בנוסף: $V[X]=25$.

לפי אי שוויון צ'בישב:

$$P(40<X<60)$$
$$=P(-10<X-50<10)=P(|X-50|<10)=1-P(|X-50|\geq 10)\geq 1-\frac{25}{10^2}=0.75$$

כלומר: $\boxed{1\geq P(40<X<60)\geq 0.75}$

2. נתון: $E[X]=V[X]=20$.

אזי:

$$P(0\leq X\leq 40)$$
$$=P(-20\leq X-20\leq 20)=P(|X-20|\leq 20)=1-P(|X-20|\geq 20)\geq 1-\frac{20}{20^2}=0.95$$

כלומר: $\boxed{1\geq P(0\leq X\leq 40)\geq 0.95}$

3. נניח כי $n$ גדול, ובנוסף כי הכנסת כדור מסויים בלתי תלויה בהכנסת הכדורים האחרים.

נסמן: X – מספר הכדורים שהוכנסו לכד הראשון. אזי תחת ההנחות הנ"ל: $X\sim Bin\left(n,\frac{1}{n}\right)$.

לפיכך: $P(X\geq m)=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$

נשתמש במשפט הגבול המרכזי לקרב את ההתפלגות לנורמלית.
נעזר בכך שהנוסחאות לחישוב תוחלת ושונות של מ"מ בינומי הן:
$E[X]=np,\ V[X]=np(1-p)$.

מכאן:

$$X\sim N\left(n\cdot\frac{1}{n},n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=N\left(1,\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

הקירוב ההסתברותי:

$$P\left(X \ge m\right) = 1 - P\left(X < m\right) = 1 - P\left(X \le m\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{m-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{1-m}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right)$$

כעת, אנו מתבקשים למצוא את $m$ השלם הקטן ביותר כך ש-:

$$P\left(X \ge m\right) = \frac{1}{n^2}$$

נציב את הביטוי שקיבלנו לעיל:

$$P\left(X \ge m\right) \le \frac{1}{n^2}$$

$$\Phi\left(\frac{1-m}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right) \le \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1-m}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \le \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$m \ge 1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

כתוצאה סופית ניקח $\lceil m \rceil$ ($\lceil . \rceil$ – פונקציית הערך השלם).

4. נתון $E\left[X\right] = 1$.

א. מלינאריות התוחלת: $E\left[\sum_{i=1}^{20} X_i\right] = 20$.

מאי שוויון מרקוב: $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right) = P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \ge 16\right) \le \frac{20}{16} = \boxed{\frac{5}{4}}$

ב. ממשפט הגבול המרכזי, הקירוב להתפלגות נורמלית הוא: $\sum_{i=1}^{20} X_i \sim N\left(20 \cdot 1, 20 \cdot 1\right)$

לכן:

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \le 15\right) = 1 - \Phi\left(\frac{15 + 0.5 - 20}{\sqrt{20}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-1\right) = \Phi\left(1\right) = \boxed{0.8413}$$

5. עבור תוצאת קובייה הוכנת $(X)$ מתקיים:

$i=1,..,100; \quad X_i \sim U[1,6], \quad E[X_i]=7/2, \; V[X_i]=35/12$.

ממשפט הגבול המרכזי, הקירוב להתפלגות נורמלית הוא:

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\left(100\cdot\frac{7}{2}, 100\cdot\frac{35}{12}\right)=N\left(350, 17.08^2\right)$$

לכן:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > a\right) \le 0.01$$
$$=1-\Phi\left(\frac{a-350}{17.08}\right)\le 0.01$$
$$=1-\Phi\left(\frac{a-350}{17.08}\right)\le 0.01$$
$$=\Phi\left(\frac{a-350}{17.08}\right)=0.99$$
$$\frac{a-350}{17.08}=\Phi^{-1}(0.99)=2.362$$
$$\Rightarrow a=389.73$$

ומכיוון שמדובר בסכום הטלות שצריך להיות מספר שלם, אזי $\boxed{a=390}$.

6. מהנתונים:

$$i=1,...,10^8; \;\; X_i \sim U\left(-0.5\cdot 10^{-6}, 0.5\cdot 10^{-6}\right):$$

$$E[X_i]=0, \qquad \sigma_i^2=V[X_i]=\tfrac{1}{12}\left(10^{-6}\right)^2=8.334\cdot 10^{14} \Rightarrow \; \sigma=2.8868\cdot 10^{-7}$$

צריך למצוא:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{10^8} X_i\right|>10^{-2}\right)$$

ממשפט הגבול המרכזי:

$$\sum_{i=1}^{10^8} X_i \sim N\left(10^8\cdot 0, 10^8\cdot 8.334\cdot 10^{-14}\right)=N\left(0, 8.334\cdot 10^{-6}\right)$$

לכן:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{10^8} X_i\right|>10^{-2}\right)=P\left(\sum_{i=1}^{10^8} X_i>10^{-2}\right)+P\left(\sum_{i=1}^{10^8} X_i<-10^{-2}\right)$$
$$=\left[1-\Phi\left(\frac{10^{-2}}{\sqrt{8.334\cdot 10^{-6}}}\right)\right]+\Phi\left(\frac{-10^{-2}}{\sqrt{8.334\cdot 10^{-6}}}\right)$$
$$=1-\Phi(3.464)+\Phi(-3.464)$$
$$=1-0.9997+0.0003=\boxed{0.0006}$$

.7

א. מציאת הפונקציה היוצרת.

<u>התפלגות פואסון:</u>

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^k}{k!}$$
$$=e^{-\lambda}\cdot e^{e^t\lambda}$$
$$=\boxed{e^{\lambda\left(e^t-1\right)}}$$

<u>התפלגות גיאומטרית:</u>

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}e^{tk}(1-p)^{k-1}p$$
$$=\frac{p}{(1-p)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^t(1-p)\right)^k$$
$$=\frac{p}{(1-p)}\cdot\frac{e^t(1-p)}{1-e^t(1-p)}\qquad(*)$$
$$=\boxed{\frac{pe^t}{1-e^t(1-p)}}\qquad\left(t<-\ln(1-p)\right)$$

(*) הטור הנ"ל מתכנס רק כאשר מתקיים: $e^t(1-p)<1$ או: $t<-\ln(1-p)$.

<u>התפלגות מעריכית:</u>

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\int_0^x e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=\lambda\int_0^x e^{(t-\lambda)x}dx$$
$$=\lambda\left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^{\infty}\qquad(*)$$
$$=\boxed{\frac{\lambda}{\lambda-t}}\qquad(t<\lambda)$$

(*) האינטגרל הנ"ל מתכנס רק כאשר מתקיים: $t<\lambda$.

ב. צריך להוכיח שסכום של $n$ מ"מ בלתי תלויים המתפלגים $X_i \sim Poi\left(\lambda_i\right)$ $\left(i=1,...,n\right)$, מתפלג $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$, עבור כל $n$ טבעי.

הוכחה:

עבור מ"מ בלתי תלויים מתקיים: $M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(t\right)$

לכן:

$$M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i\left(e^t-1\right)}=e^{(e^t-1)\sum\lambda_i}$$

כעת, לפי משפט היחידות פונקציה יוצרת מומנטים קובעת באופן יחיד התפלגות.
[נדגיש: כאשר תנאי המשפט מתקיימים].
מכיוון שצורתה של הפונקציה שקיבלנו היא פונ' יוצרת מומנטים של התפלגות פואסון, הרי שהסכום מתפלג פואסון, עם הפרמטר $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$. מ.ש.ל.

ג. נראה שסכום של $n$ מ"מ בלתי תלויים המתפלגים $X_i \sim G\left(p\right)$ $\left(i=1,...,n\right)$, מתפלג $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim NB\left(n,p\right)$, עבור כל $n$ טבעי.

הוכחה:

עבור מ"מ בלתי תלויים מתקיים: $M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(t\right)$

לכן:

$$M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{pe^t}{1-\left(1-p\right)e^t}=\left(\frac{pe^t}{1-\left(1-p\right)e^t}\right)^n$$

ולפי משפט היחידות ניתן לזהות פונ' יוצרת מומנטים זו כמתאימה להתפלגות $NB\left(n,p\right)$.
מ.ש.ל.

ד. נראה שסכום של $n$ מ"מ בלתי תלויים המתפלגים $X_i \sim Exp\left(\lambda\right)$ $\left(i=1,...,n\right)$, מתפלג $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma\left(n,\lambda\right)$, עבור כל $n$ טבעי.

הוכחה:

עבור מ"מ בלתי תלויים מתקיים: $M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(t\right)$

לכן: $M_{\sum X_i}\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda-t}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$

ולפי משפט היחידות ניתן לזהות פונ' יוצרת מומנטים זו כמתאימה להתפלגות $Gamma\left(\alpha,\lambda\right)$.
מ.ש.ל.

הערה: כאשר הפרמטר $\alpha$ בהתפלגות $Gamma(\alpha,\lambda)$ אינו שלם. הדרך הישירה לחישוב הפונקציה יוצרת המומנטים היא לפי ההגדרה, תוך שימוש שבצפיפות של התפלגות גמה.

8. <u>הערה</u>: אפשר לכתוב את הביטויים האלגבריים המתקבלים בתשובה בכמה צורות שקולות.

א. עבור: $X \sim Bin(n,p)$ :

הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t) = \left(1-p+pe^t\right)^n = \left(q+pe^t\right)^n$ .

החישוב של $\mu_3 = E\left[\left(X-E[X]\right)^3\right]$ :

מטעמי נוחות נסמן $m = E[X]$ ונפתח את הביטוי-

$$E\left[\left(X-m\right)^3\right] = E\left[X^3-3X^2m+3Xm^2-m^3\right]$$
$$= E\left[X^3\right]-3mE\left[X^2\right]+3m^2E[X]-E\left[m^3\right]$$
$$= E\left[X^3\right]-3mE\left[X^2\right]+3m^3-m^3$$
$$= E\left[X^3\right]-3mE\left[X^2\right]+2m^3$$
$$= M_X^{(3)}(0)-3M_X^{(1)}(0)M_X^{(2)}(0)+2\left(M_X^{(1)}(0)\right)^3$$

נחשב את המומנטים (סימנו: $p+q=1$ ):

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(q+pe^t\right)^n = n\left(q+pe^t\right)^{n-1}pe^t$$
$$M_X^{(1)}(0) = np$$

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(q+pe^t\right)^n$$
$$= npe^t[(q+pe^t)^{(n-2)}npe^t+(q+pe^t)^{(n-1)}-(q+pe^t)^{(n-2)}pe^t]$$
$$M_X^{(2)}(0) = np(np+q)$$

באותו אופן מקבלים:

$$M_X^{(3)}(0) = np\left(n^2p^2+pq(3n-1)+q^2\right)$$

נציב הכל בנוסחה:

$$\mu_3 = M_X^{(3)}(0)-3M_X^{(1)}(0)M_X^{(2)}(0)+2\left(M_X^{(1)}(0)\right)^3$$
$$= \left[np\left(n^2p^2+pq(3n-1)+q^2\right)\right]-3np\left[np(np+q)\right]+2(np)^2$$
$$= \boxed{npq(q-p)} = \boxed{np(1-p)(1-2p)}$$

החישוב של $\mu_4 = E\left[\left(X-E[X]\right)^4\right]$ נעשה באותו אופן. מקבלים לבסוף:

$$\mu_4 = \boxed{npq\left[2p(n-2)-3p^2(n-2)+1\right]} = \boxed{npq\left[3(n-2)pq-p(n-2)+1\right]}$$

ב. עבור: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ :

הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ .

לחישוב של $\mu_3 = E\left[\left(X - E[X]\right)^3\right]$ נחשב תחילה את המומנטים:

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = \left(\mu+\sigma^2 t\right)e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M_X^{(1)}(0) = \mu$$

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right) = \left(\sigma^2 + \left(\mu+\sigma^2 t\right)^2\right)e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M_X^{(2)}(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

באותו אופן מקבלים:

$$M_X^{(3)}(0) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

נציב הכל בנוסחה:

$$\mu_3 = M_X^{(3)}(0) - 3M_X^{(1)}(0)M_X^{(2)}(0) + 2\left(M_X^{(1)}(0)\right)^3 = \boxed{0}$$

החישוב של $\mu_4 = E\left[\left(X - E[X]\right)^4\right]$ נעשה באותו האופן. מקבלים לבסוף:

$$\mu_4 = \boxed{3\sigma 4}$$

ג. המומנטים הגבוהים של ההתפלגות בינומית לא שואפים לאלה של הנורמלית.
משפט הגבול המרכזי מתייחס אך ורק להתפלגויות.

9. הטלות הקובייה הן בלתי תלויות. ההסתברות להצלחה, כלומר לקבל בכל הטלה "1" או "2" היא $1/3$.
לפיכך ב- 300 הטלות (נסיונות), עם הסתברות להצלחה כנ"ל, מספר ההצלחות ($X$) מתפלג בינומית:
$X \sim Bin(300,1/3)$

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי מקבלים: $X \sim N\left(300\cdot 1/3, 300\cdot 1/3\cdot 2/3\right) = N\left(100, 66.667\right)$

א. $$P(X > 90) = 1 - P(X \le 90) = 1 - \Phi\left(\frac{90+0.5-100}{\sqrt{66.667}}\right) = 1 - \Phi(-1.164)$$
$$= 1 - 0.1222 = \boxed{0.8778}$$

ב. $$P(X \le 105) = \Phi\left(\frac{105+0.5-100}{\sqrt{66.667}}\right) = \Phi(0.674) = \boxed{0.7500}$$

ג. $P(85 < X < 115) = \Phi\left(\frac{115-0.5-100}{\sqrt{66.667}}\right) - \Phi\left(\frac{85+0.5-100}{\sqrt{66.667}}\right) =$

$= \Phi(1.776) - \Phi(-1.776) = 2\Phi(1.776) - 1 = \boxed{0.924}$

10. <u>פתרון לפי התפלגות פואסון:</u>

$X$ – מספר התקלות של רכיבים בשבוע.

צריך למצוא מתי: $P(X \ge 7) \ge 0.95$ , כאשר $X \sim Poi(7 \cdot 1)$ בשבוע שלם.

כלומר יש למצוא $n$ (שלם אי-שלילי) כך שיתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{7^k e^{-7}}{k!} \ge 0.95$$

בדיקה מראה שהאי שוויון מתקיים עבור $\boxed{n \ge 12}$ . (עבור $n = 11$ מקבלים 0.9467)

<u>פתרון ע"י שימוש במשפט הגבול המרכזי לקירוב ההסתברות:</u>

מכיוון ש: $E[X] = V[X] = 7$ , אזי $X \sim N(7,7)$ . לפיכך:

$$P(X \le n) \ge 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{n-7}{\sqrt{7}}\right) \ge 0.95$$

$$\frac{n-7}{\sqrt{7}} \ge 1.645$$

$$n \ge 1.645 \cdot \sqrt{7} + 7 = 11.35$$

$$\boxed{n \ge 12}$$