

זמן המבחן: שלוש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 6 שאלות (ולא יותר), חשוב לנמק היטב כל תשובה.
כל השאלות שוות במשקל
יש להתחיל את התשובה לכל שאלה בדף נפרד.

1. למשתנה מקרי X יש פונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{2(b-x)}{b^2}, \quad 0 \leq x \leq b$$

כאשר b הוא קבוע חיובי. מצא

(א) את התוחלת של X , $E[X]$,

(ב) את ההסתברות $P(X \leq E[X])$

(ג) ואת החציון של X , כלומר m כך ש- $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$

אם $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם דגימות בלתי תלויות מההתפלגות של X , כאשר b אינו ידוע, איך מוצאים את אומדן הנראות המירבית ל- b ? יש לכתוב משוואה שהאומדן מקיים. אין צורך לפתור את המשוואה, אבל יש להסביר למה האומדן יוצא מעל $\max(X_i)$.

2. אחוזי השינוי השנתיים בהכנסה הממוצעת בארה"ב בעשור האחרון הם כדלהלן:

2.59%	2002 – 3
5.00%	2003 – 4
4.55%	2004 – 5
6.41%	2005 – 6
4.72%	2006 – 7
3.65%	2007 – 8
-5.64%	2008 – 9
2.99%	2009 – 10
4.45%	2010 – 11
2.73%	2011 – 12

בהנחה שמספרים אלה הם דגימות בלתי תלויות מהתפלגות נורמלית (הנחה שניתן למתוח עליה הרבה ביקורת), מצא רווח סמך ברמת מובהקות של 95% לשינוי הממוצע. האם ניתן לקבוע ב- 95% ודאות שהסיכוי לשינוי שלילי הוא מתחת ל- 5%? (בתשובה לשאלה האחרונה אין להתייחס לבעייתיות בהנחות של נורמליות ובלתי תלות, יש לדון רק לפי המספרים. השאלה מיועדת כשאלה למחשבה - איזה השערה יש לבדוק כדי לקבוע את הטענה?)

3. בכד יש 6 כדורים ממוספרים 1 עד 6.

(א) שולפים כדורים מהכד, ללא החזרות, עד שמוציאים את הכדור עם מספר 1. אם X הוא מספר הכדורים הנשלפים, מהיא ההתפלגות של X ?

(ב) לכל $i, 1 \leq i \leq 6$, מצא את ההתפלגות של מספר הכדורים שיש לשלוף, ללא החזרות, עד שמוציאים כדור עם מספר i או פחות.

(ג) מטילים קוביה הוגנת, ושולפים כדורים מן הכד, ללא החזרות, עד שמקבלים כדור עם מספר נמוך מ- או שווה למה שמופיע בקוביה. אם נשלפו 2 כדורים, מהיא ההסתברות שהמספר שהופיע בקוביה היה 2?

4. (א) מטילים מטבע הוגן 50 פעמים. העזר במשפט הגבול המרכזי למשתנה מקרי בינומי למצוא את ההסתברות שמופיעים לפחות 20 "ראש"ים.

(ב) מטילים מטבע הוגן עד שמקבלים 20 פעמים "ראש". העזר במשפט הגבול המרכזי למשתנה מקרי בינומי שלילי למצוא את ההסתברות שיש צורך להטיל את המטבע לפחות 50 פעמים.

(ג) למה התשובות בשני הסעיפים הקודמים צריכות להיות משלימות? (יש לדייק בניסוח התשובה שלך). במקרה ולא יצאו בדיוק משלימות, איך ניתן להסביר את זה?

5. בבניין עם M קומות, N אנשים נכנסים למעלית ובוחרים באקראי ובלי תלות בין אחד לשני לאיזה קומה הם רוצים להגיע.

(א) אם X_i מסמן משתנה מקרי המקבל את הערך 1 אם המעלית כן תעצור בקומה i , ו-0 אחרת, מצא את $E[X_i]$, את $\text{Var}(X_i)$ ואת $\text{cov}(X_i, X_j)$.

(ב) מצא את התוחלת ואת השונות של סה"כ מספר הקומות שהמעלית תעצור בהן.

(ג) אם מספר האנשים הנכנסים אינו קבוע, אבל יודעים שהוא משתנה מקרי פאוסוני עם קצב λ , מהיא עכשיו התוחלת של מספר הקומות שהמעלית תעצור בהן?

6. לזוג משתנים מקריים (X, Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x < 1$$

(א) מצא את $E[X]$, את $E[Y]$ ואת $\text{cov}(X, Y)$.

(ב) מצא את פונקציית הצפיפות של Y בהנתן ש- $X = x$, ואת התוחלת המותנת $E[Y|X = x]$.

(ג) נכון או לא נכון: אם לזוג משתנים מקריים (X, Y) התוחלת המותנית $E[Y|X = x]$ היא פונקציה עולה של x , אזי בהכרח $\text{cov}(X, Y) > 0$. נמק היטב את תשובתך.

7. הזמן בין שיחות טלמרקטינג שאני מקבל הוא משתנה מקרי מעריכי עם תוחלת 4 שעות (ואין תלות בין הזמנים בין שיחות). כאשר אני מקבל שיחה אני או מקשיב להודעה ואז סוגר או מייד טורק את השפופרת. אם הקשבתי להודעה אז אני רק אקשיב להודעה הבאה אם היא מגיעה אחרי הפסקה של לפחות 8 שעות. אם לא הקשבתי להודעה אז אני אקשיב להודעה הבאה אם היא מגיעה אחרי לפחות 4 שעות.

(א) מצא את מטריצת המעבר של שרשרת מרקוב המתאר את המצב.

(ב) מהיא ההסתברות, בטווח הארוך, שאני אקשיב להודעה ?

(ג) אם משלוש שיחות שהיו לי ברצף הקשבתי להודעה הראשונה ולהודעה השלישית, מהיא ההסתברות שגם הקשבתי להודעה השנייה?

8. (א) במסעדה מסויימת, 20% מהסועדים מזמינים פאי תפוחים. כל יום מגיעים 200 סועדים למסעדה. מצא את מספר הפאיים שיש צורך להכין כדי שבהסתברות 95% יהיו מספיק.

(ב) מצא את מספר הפאיים שיש צורך להכין כדי שההסתברות לזרוק 8 פאיים או יותר בסוף היום יהיה שווה להסתברות שאין מספיק. מהיא ההסתברות הזאת?

(ג) מוצאים שהאחוזים של סועדים המזמינים פאי תפוחים משתנה לפי מספר האורחים היושבים בשולחן. בתוך 500 סועדים מוצאים את הנתונים הבאים:

מספר אורחים בשולחן	מזמינים	לא מזמינים
1	1	12
2	53	153
3	28	83
4	6	70
5+	12	82

האם ניתן לקבוע ב- 90% ודאות שיש תלות בין מספר האורחים בשולחן וההחלטה להזמין פאי תפוחים?