בס"ד

<u>תוחלת ושונות בבהתפלגות הבינומית השלילית</u>

התפלגות בינומית שלילית:

$$\mathbf{P}(X=s)=\binom{s-1}{r-1}p^r(1-p)^{s-r}\ , \qquad s=r,r+1,r+2,...$$

(X הוא מספר הניסויים עד ל- r הצלחות בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים, כל אחד עם סיכוי p להצלחה.)

יש מספר דרכים למצוא את התוחלת ואת השונות של X, לדוגמה ניתן לבטא את X כסכום של r משתנים מקריים גאומטריים בלתי תלויים. כאן אנחנו נבדוק באופן ישיר שסכום ההסתברויות שווה 1, וכמו כן נמצא את התוחלת ואת השונות.

$$\begin{aligned}
\sum_{s=r}^{\infty}\mathbf{P}(X=s) &= \sum_{s=r}^{\infty}\binom{s-1}{r-1}p^r(1-p)^{s-r}\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(s-r)!}q^{s-r} \qquad (q=1-p)\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}(s-1)(s-2)\dots(s-r+1)q^{s-r}\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r-1}q^{s-1}
\end{aligned}$$

יש לשים לב לזה שאם $1\le s<r$ אזי $\left(\frac{d}{dq}\right)^{r-1}q^{s-1}=0$. ולכן ניתן להרחיב את הסכום לרוץ מ- $s=1$ עד $s=\infty$. כלומר:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=r}^{\infty}\mathbf{P}(X=s) &= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r-1}\sum_{s=1}^{\infty}q^{s-1}\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r-1}\frac{1}{1-q}\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\frac{(r-1)!}{(1-q)^r}\\
&= 1
\end{aligned}$$

כמו כן:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{s=r}^{\infty}s\mathbf{P}(X=s)\\
&= \sum_{s=r}^{\infty}s\binom{s-1}{r-1}p^r(1-p)^{s-r}\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}s\frac{(s-1)!}{(s-r)!}q^{s-r} \qquad (q=1-p)\\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}s(s-1)(s-2)\dots(s-r+1)q^{s-r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}\left(\frac{d}{dq}\right)^r q^s \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^r \sum_{s=0}^{\infty} q^s \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^r \frac{1}{1-q} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\frac{(r)!}{(1-q)^{r+1}} \\
&= \frac{r}{p}
\end{aligned}
$$

כדי לחשב את השונות מומלץ לחשב קודם את

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X(X+1)] &= \sum_{s=r}^{\infty} s(s+1)\mathbf{P}(X=s) \\
&= \sum_{s=r}^{\infty} s(s+1)\binom{s-1}{r-1} p^r(1-p)^{s-r} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty} s(s+1)\frac{(s-1)!}{(s-r)!}q^{s-r} \qquad (q=1-p) \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}(s+1)s(s-1)(s-2)\ldots(s-r+1)q^{s-r} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{s=r}^{\infty}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r+1} q^{s+1} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r+1} \sum_{s=-1}^{\infty} q^{s+1} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\left(\frac{d}{dq}\right)^{r+1} \frac{1}{1-q} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!}\frac{(r+1)!}{(1-q)^{r+2}} \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2}
\end{aligned}
$$

אז יש לשים לב ש-

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}[X^2]-(\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \mathbf{E}[X(X+1)]-\mathbf{E}[X]-(\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2} \\
&= \frac{r(1-p)}{p^2}
\end{aligned}
$$