בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר א', תשס"ד

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של שיטת ניוטון למצוא קירוב טוב לשורש של $e^x = 3x$ שהוא קרוב ל-0.6. מה הוא, לדעתך, הדיוק של הקירוב שמצאת?

תשובה: רקורסיית ניוטון לפתרון $f(x) = 0$ היא $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. במקרה שלנו:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 3x_n}{e^{x_n} - 3} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n}}{e^{x_n} - 3}$$

אם לוקחים $x_0 = 0.6$ מקבלים

$$x_1 = 0.61877846 \ , \qquad x_2 = 0.61906122 \ , \qquad x_3 = 0.61906129$$

היות ו-x_2 מדוייקת ל-6 ספרות דיוק, ושיטת ניוטון מתכנס ריבועי, סביר להניח ש-x_3 מדויק עד ליכולת של המחשבון שלי.

2. כאשר כותבים ב- Matlab את הפקודות

```
A=[1 3 4 ; -1 2 3 ; 1 1 0] ;
[z zz]=eig(A)
```

מקבלים את התגובות

$$\mathtt{z} = \begin{pmatrix} 0.8629 & -0.2811 & 0.9239 \\ -0.3574 & -0.6786 & 0.1421 \\ 0.3574 & 0.6786 & 0.3553 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathtt{zz} = \begin{pmatrix} 1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0000 \end{pmatrix}$$

העזר בתוצאות האלה למצוא את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של A באופן מדויק.

תשובה: מהעמוד האחרון ב- z ו- zz רואים שיש ערך עצמי 3 ווקטור עצמי $(\ 13 \quad 2 \quad 5\ )^T$. בדיקה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

משתי העמודות האחרות רואים שיש ערכים עצמיים $\pm\sqrt{2}$ עם ווקטורים עצמיים מהצורה $(\ x \quad 1 \quad -1\ )^T$. למצוא את x: צריך

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן $x = \mp\sqrt{2} - 1$

(כלומר לערך העצמי $\sqrt{2}$ יש $x = -\sqrt{2} - 1$, ולערך העצמי $-\sqrt{2}$ יש $x = +\sqrt{2} - 1$.)

3. מצא פולינום מדרגה 3 או פחות שעובר דרך הנקודות הבאות:

x_i	0	1	2	4
y_i	0	3	3	5

יש להשתמש בשיטת הפרשים מחולקים.

תשובה: טבלה של הפרשים מחולקים:

x_i	y_i			
0	0			
1	3	3		
2	3	0	$-\frac{3}{2}$	
4	5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{24}$

פולינום הביון:

$$3x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{11}{24}x(x-1)(x-2)$$

4. מצא, על ידי כלל סמפסון עם $h = \frac{\pi}{4}$, קירוב לאינטגרל $\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$.

תשובה:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx &\approx \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\left(e^0\sin 0 + 4e^{-\pi/4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2e^{-\pi/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4e^{-3\pi/4}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + e^{-\pi}\sin\pi\right)\\ &= \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}e^{-\pi/4} + 2e^{-\pi/2} + 2\sqrt{2}e^{-3\pi/4}\right)\\ \approx 0.517\end{aligned}$$

(תשובה מדוייקת: 0.522.)

5. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y' = \frac{1}{1+ty}\ , \qquad y(0) = 1$$

העזר בשיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$ למצוא קירוב ל-$y(1)$.

תשובה: שיטת אויילר לפתרון המשוואה

$$y' = f(t,y)\ , \qquad y(0) = y_0$$

היא

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

במקרה שלנו

$$f(t,y) = \frac{1}{1+ty}\ , \qquad y_0 = 1$$

ולוקחים $h = \frac{1}{4}$. ולכן

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{1}{4} f(0,1) = \frac{5}{4} \\ y_2 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{121}{84} \\ y_3 &= \frac{121}{84} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}, \frac{121}{84}\right) \approx 1.586 \\ y_4 &\approx 1.586 + \frac{1}{4} f\left(\frac{3}{4}, 1.586\right) \approx 1.70 \end{aligned}$$

כלומר $y(1) \approx 1.70$. (תשובה מדוייקת: 1.625.)

6. חשב את הטעות הייחסית במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1.4 & 2.7 & -1.5 \\ 1.9 & 0.3 & 2.1 \\ -1.1 & 1.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

כקירוב למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 2.4 & -1.9 \\ 1.6 & 0.3 & 2.2 \\ -1.2 & 2.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

יש לעבוד גם בנורמה 1 גם בנורמה ∞.

תשובה: אם נקרא למטריצה הראשונה A ולשנייה A', ברצוננו לחשב את

$$\frac{||A - A'||}{||A||}$$

(אפשר $||A'||$ במכנה, ההבדל לא יהיה גדול.) יש לנו ש-

$$A - A' = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

בנורמה 1 (סכומים על עמודות):

$$||A|| = 4.7 \ , \qquad ||A - A'|| = 0.8 \ , \qquad \frac{||A - A'||}{||A||} \approx 0.17$$

בנורמה אינסוף (סכומים על שורות):

$$||A|| = 5.6 \ , \qquad ||A - A'|| = 1.1 \ , \qquad \frac{||A - A'||}{||A||} \approx 0.20$$

חלק ב'

1. הסבר בקצרה איך ניתן למצוא פירוק QR של מטריצה.

למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -21 \\ 7 & -1 & 7 \\ 14 & 57 & 0 \\ 7 & -22 & -7 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = \begin{pmatrix} -0.3780 & 0.4989 & 0.7327 & -0.2673 \\ -0.3780 & -0.0384 & -0.4613 & -0.8018 \\ -0.7559 & 0.1919 & -0.3256 & 0.5345 \\ -0.3780 & -0.8443 & 0.3799 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 \\ 0 & 0 & -21.2748 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העזר בפירוק זה למצוא את הפתרון (במובן של ריבועים מזעריים) של המערכת

$$Ax \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מתברר שה-0 ברכיב $3,3$ של A היה שגוי, והיה צריך להיות מספר אחר, שנסמן μ. איך זה משפיע על פתרון המערכת ?

תשובה: (אני מדלג על ההסבר על אחד האלגוריתמים לחישוב פירוק QR, או על ידי סיבובים או על ידי שיקופים.) אם $Ax \approx b$ ו- $A = QR$, אזי $Rx \approx Q^T b$. כלומר במקרה שלנו:

$$\begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 \\ 0 & 0 & -21.2748 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3780 & -0.3780 & -0.7559 & -0.3780 \\ 0.4989 & -0.0384 & 0.1919 & -0.8443 \\ 0.7327 & -0.4613 & -0.3256 & 0.3799 \\ -0.2673 & -0.8018 & 0.5345 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -0.3780 \\ 0.4989 \\ 0.7327 \\ -0.2673 \end{pmatrix}$$

מקבלים את הפתרון במובן של ריבועיים מזעריים על ידי שפשוט שוכחים מהשורה האחרונה של המשוואה. כלומר רק צריך לפתור

$$\begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 \\ 0 & 0 & -21.2748 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3780 \\ 0.4989 \\ 0.7327 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$x_3 \approx -0.03444\ , \qquad x_2 \approx 0.012755\ , \qquad x_1 \approx 0.00565$$

עכשיו צריך לעבוד על המשוואה $A'x \approx b$ כאשר $A' = A + \mu E$ ו-

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכפילים על ידי Q^T לקבל $(R + \mu Q^T E)x \approx Q^T b$, כלומר

$$\left(\begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 \\ 0 & 0 & -21.2748 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu Q^T E \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3780 \\ 0.4989 \\ 0.7327 \\ -0.2673 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 - 0.7559\mu \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 + 0.1919\mu \\ 0 & 0 & -21.2748 - 0.3256\mu \\ 0 & 0 & 0.5346\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3780 \\ 0.4989 \\ 0.7327 \\ -0.2673 \end{pmatrix}$$

מכפילים בשני הצדדים על ידי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

כאשר

$$(-s)(-21.2748 - 0.3256\mu) + 0.5346\mu c = 0$$

ומקבלים

$$\begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 - 0.7559\mu \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 + 0.1919\mu \\ 0 & 0 & (-21.2748 - 0.3256\mu)c + 0.5346\mu s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3780 \\ 0.4989 \\ 0.7327c - 0.2673s \\ -0.7327s - 0.2673c \end{pmatrix}$$

המשך הפתרון כמו קודם: לדוגמה

$$x_3 = \frac{0.7327c - 0.2673s}{(-21.2748 - 0.3256\mu)c + 0.5346\mu s}$$

2. כאשר y הוא קטן, ידוע ש-

$$\sin y - y \approx -\frac{1}{6}y^3$$

כאשר אני כותב ב- Matlab את הפקודות הבאות:

```
x=[-1:-1:-8]';
y=10.^x;
(6)*(y-sin(y))./y.^3
```

אני מקבל את המספרים הבאים:

$$\begin{matrix} 0.99950011903110 \\ 0.99999500001446 \\ 0.99999995003402 \\ 0.99999996889914 \\ 1.00000370939664 \\ 0.99992239423370 \\ 1.03232140446618 \\ 0 \end{matrix}$$

הסבר בקצרה את הפקודות ב- Matlab. הסבר בפרוטרוט למה המספרים שהתקבלו הם שונים מ-1. יש לתת הסבר גם איכותי וגם כמותי: כלומר, לא רק להסביר את המקורות השונות של "שגיאה", אלה גם לחשב בכמה כל מקור של שגיאה יכול להשפיע, ולבדוק שהמספרים שהתקבלו הם מתאימים.

תשובה: הפקודות ב- Matlab: x יהיה הווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T$$

y יהיה הווקטור

$$\begin{pmatrix} 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} & 10^{-4} & 10^{-5} & 10^{-6} & 10^{-7} & 10^{-8} \end{pmatrix}^T$$

הפקודה האחרונה מחשבת את הערך של

$$\frac{6(y-\sin(y))}{y^3}$$

לכל ערך של y בווקטור הקודם.

יש שתי סיבות למה המספרים שיוצאים אינם שווים ל-1. קודם כל יש שגיאה אלגוריתמית, של- y קטן הכמות שמחשבים אינה בדיוק שווה 1, אלה

$$\frac{6(y-\sin(y))}{y^3} = \frac{6\left(y-\left[y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{120}y^5-\ldots\right]\right)}{y^3} \approx 1-\frac{y^2}{20}$$

כלומר יש טעות אלגוריתמית מסדר גודל $y^2/20$. יש גם שגיאת עיגול שנובע מחיסור של שני מספרים קורבים, y ו- $\sin y$. שגיאת עיגול בכל אחד מהם הוא עד $\epsilon|y|$, ולכן בהפרש עד $2\epsilon|y|$. ולכן בכמות המחושבת יש שגיאת עיגול עד סדר גודל

$$\frac{6}{|y|^3}2\epsilon|y| = \frac{12\epsilon}{y^2}$$

יש לשים לב שהשגיאה האלגוריתמית היא גדלה כאשר y גדל, אבל הפוך לשגיאת העיגול.

נעשה טבלה של השגיאות האקטאליות, והאומדנים לשגיאה האלגוריתמית ושגיאת העיגול:

y	שגיאה	$y^2/20$	$12\epsilon/y^2$
10^{-1}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	1.3×10^{-13}
10^{-2}	5×10^{-6}	5×10^{-6}	1.3×10^{-11}
10^{-3}	5×10^{-8}	5×10^{-8}	1.3×10^{-9}
10^{-4}	3×10^{-8}	5×10^{-10}	1.3×10^{-7}
10^{-5}	4×10^{-6}	5×10^{-12}	1.3×10^{-5}
10^{-6}	8×10^{-5}	5×10^{-14}	1.3×10^{-3}
10^{-7}	3×10^{-2}	5×10^{-16}	0.13
10^{-8}	$\frac{1}{2}$	5×10^{-18}	13

רואים שהשגיאה האלגוריתמית היא דומיננטית ל-3 הערכים הראשונים של y, ולשאר הערכים שגיאת העיגול דומיננטית.

3. מה היא שיטת הירידה הטלולה למציאת מינימום של פונקציה?

הוכח שאם מפעילים סיבוב אחד של שיטת הירידה הטלולה על הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2)$$

מקבלים את הרקורסיה

$$(x,y) \to \left(\frac{B^2(B-A)y^2}{A^3x^2 + B^3y^2}x, \frac{A^2(A-B)x^2}{A^3x^2+B^3y^2}y \right)$$

הוכח מזה שאחרי שני סיבובים של השיטה היחס x/y איננו משתנה, גם כי הוא כן משתנה אחרי סיבוב אחד.

מה הוא האנלוג של הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים סיבוב אחד של השיטה לפונקציה

$$? \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \ldots A_nx_n^2)$$

תשובה: (שוב אני מדלג על שלב ההסבר.) בשיטת הירידה הטלולה, אם מתחילים בנקודה (x,y), מחפשים בכיוון

$$-\nabla f(x,y) = -\begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix}$$

(לפונקציה שלנו). כלומר מחפשים s כך ש-

$$f(x - sAx, y - sBy) = \frac{1}{2}\left(A(x-sAx)^2 + B(y-sBy)^2\right)$$

מינימלי. על ידי גזירה ביחס ל- s מקבלים

$$-A^2x(x-sAx) - B^2y(y-sBy) = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{A^3x^2 + B^3y^2}$$

ולכן האיטרציה היא

$$\begin{aligned}(x,y) &\to \left(x-\frac{A^2x^2+B^2y^2}{A^3x^2+B^3y^2}Ax, y-\frac{A^2x^2+B^2y^2}{A^3x^2+B^3y^2}By\right)\\ &= \left(\frac{B^2(B-A)y^2}{A^3x^2+B^3y^2}x, \frac{A^2(A-B)x^2}{A^3x^2+B^3y^2}y\right)\end{aligned}$$

רואים מהרקורסיה ש-

$$\frac{x}{y} \to \frac{B^2(B-A)y^2}{A^2(A-B)x^2}\frac{x}{y} = -\frac{B^2}{A^2}\frac{y}{x}$$

תחת שני סיבובים של הרקורסיה יש לנו

$$\frac{x}{y} \to -\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{\left(-\frac{B^2}{A^2}\frac{y}{x}\right)} = \frac{x}{y}$$

כלומר x/y לא משתנה.

האנלוג הרב מימדי הוא הרקורסיה $x_i \to x_i - sA_ix_i$ כאשר בוחרים s כך ש-

$$\sum_{i=1}^n A_i(x_i - sA_ix_i)^2$$

הוא מינימלי. על ידי גזירה מקבלים

$$\sum_{i=1}^n A_i^2x_i(x_i - sA_ix_i) = 0 \qquad \Rightarrow s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i^2x_i^2}{\sum_{i=1}^n A_i^3x_i^2}$$

והרקורסיה היא

$$x_i \to x_i\left(1 - A_i\frac{\sum_{j=1}^n A_j^2x_j^2}{\sum_{j=1}^n A_j^3x_j^2}\right) = x_i\frac{\sum_{j=1}^n A_j^2(A_j-A_i)x_j^2}{\sum_{j=1}^n A_j^3x_j^2}$$

4. נוסחת התרבוע

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{i=1}^3 w_if(x_i)$$

היא מדוייקת לפולינומים ממעלה 5 או פחות אם לוקחים קודקודים ומשקלות כדלהלן:

x_i	0.4157745568	2.2942803603	6.2899450829
w_i	0.7110930099	0.2785177336	0.0103892565

כמו כן הנוסחה

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{i=1}^4 w_if(x_i)$$

היא מדוייקת לפולינומים ממעלה 7 או פחות אם לוקחים קודקודים ומשקלות כדלהלן:

x_i	0.3225476896	1.7457611012	4.5366202969	9.3950709123
w_i	0.6031541043	0.3574186924	0.0388879085	0.0005392947

העזר בשני הנוסחאות למצוא קירובים לאינטגרלים

$$\int_0^\infty \sin x e^{-x} dx \ , \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx$$

התשובות המדוייקות לאינטגרלים הם $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}$ בהתאם. האם אתה יכול להסביר, דרך טור הטיילור של $\sin x$, למה הסימנים של הטעויות שונים לשתי נוסחאות הקירוב?

תשובה: יישום שתי נוסחאות הקירוב זה רק שאלה של עבודה שחורה: עם 3 הנקודות מקבלים

$$\int_0^\infty \sin x e^{-x} dx \approx 0.49603 \ , \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx \approx 0.78178$$

עם 4 הנקודות מקבלים

$$\int_0^\infty \sin x e^{-x} dx \approx 0.50488 \ , \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx \approx 0.78592$$

רואים שהקירובים שמקבלים עם 3 נקודות הם קטנים מהתשובות הנכונות ($\pi/4 \approx 0.78540$), והתשובות עם 4 נקודות הם גדולים מהתשובות הנכונות.

הסבר לכך: הפונקציות באינטגרלים שואפות מהר ל-0, בגלל הגורם e^{-x}, ולכן ניתן לקבל קירוב טוב לאינטגרלים על ידי שמפתחים את הגורם $\sin x$ לטור טיילור (ולוקחים מספר סופי של איברים). הנוסחה הראשונה (עם 3 נקודות) היא מדוייקת לפולינומים מדרגה עד 5, ולכן מן הסתם הטעויות בקירובים באות מהאיבר $-x^7/7!$ בטור. הטעויות בקירובים מהנוסחה עם 4 נקודות באות מהאיבר $+x^9/9!$ השינויים בסימן באים (בגדול) מהשינוי בסימן בין שני האיברים האלה. (אני קצת מקצר כאן בהסבר.)