בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר א', תשס"ד

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. חשב, בנורמה 1, את הטעות הייחסית במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 762 & 204 \\ 121 & 24 & 650 \end{pmatrix}$$

כקירוב למטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 45 & 788 & 213 \\ 109 & 20 & 640 \end{pmatrix}$$

האם זה מה שמקבלים כאשר כותבים `norm(B-A)/norm(B)` ב- Matlab ?

2. איך מקבלים את הערכים העצמיים של מטריצה ב- Matlab ואיך מקבלים את הערכים הסינגולריים ? איזה מהם בהכרח נותן מספרים ממשיים לא-שליליים ? איזה מהם מוגבל למטריצות ריבועיות ? אם, כאשר אני מחשב את הערכים הסינגולריים של מטריצה גדולה, אני מוצא רק מספר קטן של ערכים שאינם אפס, מה היא המשמעות של זה?

3. מה יתנו לי הפקודות הבאות ב-Matlab:

```
x = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y = [0 1 4 6 9 9 9 8 3 1 0];
xx = [0:0.1:10];
plot( xx , spline(x,y,xx) )
```

4. מצא פולינום מדרגה 4 או פחות שעובר דרך הנקודות הבאות:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	3	3	4	4

5. כאשר מחשבים את האינטגרל

$$\int_0^1 \sin(\sin x)\, dx$$

על ידי כלל הטרפז עם 2, 4 ו-8 צעדים, מקבלים את התוצאות

$$I_2 \approx 0.4170408129\ , \quad I_4 \approx 0.4272589632\ , \quad I_8 \approx 0.4297719534$$

העזר בשיטת רומברג למצוא קירוב משופר לאינטגרל מהתוצאות האלה.

6. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y'' = y^2 + t^2\ , \qquad y(0) = 0\ , y'(0) = -1$$

איזה פקודות היית כותב ב-Matlab כדי למצוא קירוב ל-$y(1)$. (יש רק להסביר את השיטה ode45.)

חלק ב'

1. הפונקציה
$$f(t)=\int_0^1 \sin\left(x^2+t^2\right)dx$$
היא חיובית כאשר $t=1.6$ ושלילית כאשר $t=1.7$. העזר בשלושה סיבובים של חציית קטעים למצוא קירוב לשורש של $f(t)=0$. ניתן לחשב את האינטגרלים שצריך על ידי כלל הטרפז עם 4 קטעים. איך היית מפעיל שיטת ניוטון לבעייה זו ?

2. (א) הסבר את חיפוש יחס הזהב למציאת מינימום של פונקציה של משתנה אחד. למה היא יעילה, ובכמה ניתן לקצר קטע שבו נמצא מינימום על ידי n סיבובים של השיטה ? יש להדגים על ידי (לא פחות מ-3 סיבובים) לפונקציה
$$\frac{x(2+x)}{2+\sin x}$$
שיש לו מינימום בין $x=-2$ ובין $x=0$.

(ב) יודעים שהפונקציה $f(x)$ מתאפסת כאשר $x=0$ וכאשר $x=1$, ושהיא אונימודלית, בעלת מינימום יחיד, בין 0 ל-1. רוצים לצמצם את הקטע בו נמצא המינימום, ומותר לנו לחשב את הפונקציה $f(x)$ רק עבור שני ערכים של x. למה הכי טוב לחשב את x בשתי נקודות קרובות ל- $x=\frac{1}{2}$? עם מותר ב-3 נקודות, למה הכי טוב ב- $x=\frac{1}{3}$ וב- $x=\frac{2}{3}$ ואח"כ עוד פעם קרוב או ל- $x=\frac{1}{3}$ או ל- $x=\frac{2}{3}$, תלוי באיזה מהם f יותר נמוך ? מה היית עושה אם מותר לחשב את $f(x)$ 4 פעמים ?

3. (א) מה הוא ההבדל בין פירוק LU ופירוק Choleski ?

(ב) מצא את פירוק LU למטריצה
$$A=\begin{pmatrix} 25 & -20 & 20 \\ -20 & 25 & -10 \\ 20 & -10 & 29 \end{pmatrix}$$
(אין צורך ב- pivoting).

(ג) למטריצה בסעיף הקודם יש פירוק Choleski $A=LL^T$, כאשר
$$L=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
על ידי השוואה עם הפירוק שמצאת בסעיף הקודם, הסבר איך, באופן כללי, ניתן לחשב פירוק LU רגיל עם יודעים פירוק Choleski וגם הפוך.

4. (א) רוצים למצוא נומרית את $y(1)$ כאשר $y(t)$ פותר את הבעייה

$$y' = y \ , \qquad y(0) = 1$$

(פתרון מדויק $y(t) = e^t$). איזה קירוב לתשובה מקבלים על ידי שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$, ואיזה על ידי שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$? באיזה h היה צריך להשתמש בשיטת אויילר כדי לקבל את הדיוק של שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$?

(ב) רוצים למצוא נומרית את $y(1)$ כאשר $y(t)$ פותר את הבעייה

$$y' = -2y \ , \qquad y(0) = 1$$

(פתרון מדויק $y(t) = e^{-2t}$). איזה קירוב לתשובה מקבלים על ידי שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$, ואיזה על ידי שיטת רונגה קוטה עם $h = 1$? באיזה h היה צריך להשתמש בשיטת רונגה קואה כדי לקבל את הדיוק של שיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$?

בהצלחה!!