בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234-01
תרגיל 1

1. פתור את המשוואות

$$y' = y/x$$
$$y' = -y/x$$
$$y' = x/y$$
$$y' = -x/y$$

בכל המקרים, צייר את הגרפים של הפתרונות. באיזה מקרים קיים פתרון למשוואה כך ש- $y(0) = 0$?

2. פתור את המשוואות

$$y' = xe^{x+y}$$
$$(xy^2 + x)y' = (x^2y + y)$$
$$(1 + x^2)y' + 2xy = x$$

3 א. פתור את המשוואות

$$y' \cos x + y \sin x = 1$$
$$y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = x$$

ב. פתור את המשוואה

$$\frac{dy}{dx} - ay = e^{mx}$$

כאשר a, m קבועים; בדוק את כל האפשרויות!

ג. מצא את הפתרון היחיד של המשוואה

$$xy' + y = f(x)$$

שעבורו $y(0)$ סופי. מה הוא $y(0)$ לפתרון זה ? מה הוא $y(0)$ לפתרון של המשוואה

$$xy' - y = f(x) \quad ?$$

האם למשוואה זאת יש פתרון יחיד עם $y(0)$ סופי ?

4 א. על ידי ההצבה $z = y^{1-n}$, הראה שניתן להביא את המשוואה

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)y^n \qquad n \neq 1$$

לצורה ליניארית. (המשוואה הזאת נקראת "משוואת Bernoulli".) על ידי השיטה הזאת, פתור את המשוואה

$$yy' + xy^2 = x$$

ב. על ידי ההצבה $y(x) = v(x)x$, הראה שניתן להביא את המשוואה

$$y' = f(y/x)$$

לצורה "ניתנת לפרידה". על ידי זה, פתור את המשוואה

$$y' = \frac{x-y}{x-3y}$$

5. פתור את המשוואות הדפרנציאליות הבאות:

$$3y'' - 5y' + 2y = 0$$
$$4y'' - 4y' + 3y = 0$$
$$9y'' - 12y' + 4y = 0$$
$$8y'' + 14y' - 15y = 0$$
$$y'' - 2y' = 0$$
$$3y'' + 2y = 0$$
$$y'' + 2y' + 4y = 0$$
$$2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$$
$$2y'' - 5\sqrt{3}y' + 6y = 0$$

6. פתור את המשוואות הדפרנציאליות הבאות:

$$y'' + y' = 2x + 3e^x$$
$$y'' + y' = 2 + e^{-x}$$
$$y'' - y' = \sin x$$
$$y'' + y = 3\cos x$$
$$y'' + y' - 6y = 6(x+1)$$
$$y'' - 5y + 6y = -2 + 36x^2 + e^x$$
$$y'' - 4y' + 5y = (1+x)^3$$
$$y'' + 6y' + 10y = x^4 + 2x^2 + 2$$

7. א. מצא את הפתרון הכללי למשוואה

$$y'' + \Omega^2 y = F \cos \Omega x$$

ב. מצא את הפתרון הכללי למשוואה

$$y'' + 2ky' + \Omega^2 y = F \cos \Omega x$$

כאשר k הוא מספר חיובי קטן.

ג. הראה שאפשר לקבל את הפתרון שקבלת בסעיף א על ידי חישוב הגבול $k \to 0$ של הפתרון שקבלת בסעיף ב. (יש לנסות, קודם כל, במקרה $F = 0$.)

8. הוכח שאם $k^2 \geq \Omega^2$, אזי הפתרון היחיד של המשוואה $y'' + 2ky' + \Omega^2 y = 0$ שמקיים $y(0) = y(1) = 0$ הוא $y(x) = 0$. הוכח שאותו דבר נכון כאשר $\Omega^2 > k^2$, חוץ מכאשר $\Omega^2 = k^2 + n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$. מה קורה במקרה הזה?

9. למערכת של משוואות

$$\frac{dy(x)}{dx} = ay(x) + bz(x)$$
$$\frac{dz(x)}{dx} = cy(x) + dz(x)$$

(a, b, c, d קבועים), הוכח שקיים פתרון

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

(y_0, z_0, λ קבועים) אם הווקטור $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ הוא ווקטור עצמי של המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

עם ערך עצמי λ.