בס"ד

אנליזה שימושית, 88-234-01   ד"ר.גרמי שיף

תרגיל 2

1. למשוואות הבאות, נתונים שני פתרונות של המשוואה ההומוגנית הקשורה. פתור את המשוואות.

$$x, x^2 \qquad y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = x \ln x$$

$$1, e^{x^2} \qquad y'' - \left(2x + \frac{1}{x}\right) y' = x^4 e^{x^2}$$

$$x, x \ln |x| \qquad x^2 y'' - xy' + y = x(x+1)$$

2. האופרטור האינטגרלי L מוגדר על ידי

$$(Lf)(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

על ידי חישוב של הנגזרת השנייה של $Lf(x)$ לפי x, הוכח ש- $y = Lf(x)$ פותר את המשוואה

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = f(x)$$

(רמז:

$$\left(\quad \frac{d}{dx} \int^x g(x,t) dt = g(x,x) + \int^x \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} dt \right.$$

3. $y_1 = x$ ו- $y_2 = x^2$ פותרים את המשוואה

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

מצא נוסחה עבור פתרון הבעיה

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 b(x)$$
$$y(a) = y'(a) = 0, \qquad a > 0$$

בדוק שהנוסחה שלך נותנת את הפתרון הנכון במקרה $b(t) = t$, $a = 1$.

4. עבור הפונקציות הבאות, מצא את טור הפוריה של כל פונקציה, וצייר גרפים של הסכומים של טורי הפוריה בתחום $-3\pi \le x \le 3\pi$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = e^x \qquad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = \cos \alpha x \qquad -\pi < x < \pi$$

(α הוא מספר ממשי כל שהוא). על ידי הצבה של $x = \pi/2$ בטור הראשון, ו- $x = 0$ בטור השני ובטור השלישי (האחרון במקרה ש- α איננו שלם) הוכח ש-

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{\sinh \pi}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}\right)$$

5. מצא את טור הסינוסים ואת טור הקוסינוסים של הפונקציה $f(x) = x^4$ בקטע $0 < x < \pi$.
מה הם הסכומים של שני הטורים עבור $x = \pi$?

6. מצא, עבור הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

א. טור פוריה מלא על הקטע $0 < x < 2$.
ב. טור סינוסים על הקטע $0 < x < 2$.
ג. טור קוסינוסים על הקטע $0 < x < 2$.
צייר גרפים של הסכומים של שלושה הטורים בקטע $-6 < x < 6$.

7. אם לפונקציה $f(x)$ יש טור פוריה

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

הוכח ש-

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(יש להניח שניתן לחשב את האינטגרל על ידי הכפלת טור הפוריה של $f(x)$ עם עצמו איבר-איבר ואינטגרציה איבר-איבר.) על ידי הנוסחה הזאת והטור הראשון משאלה 4, הוכח ש-

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

8. אם $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $0 < x, y < \pi$, ובתחום זה אפשר לכתוב

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my$$

אזי אומרים שהטור הכפול הזה הוא "טור הסינוסים הכפול של f ".

א. בהנחה שהטור מתכנסת במידה שווה, מצא את המקדמים b_{nm}.

ב. חשב את המקדמים במקרה ש- $f(x,y)$ היא 1 בתחום $0 < x, y < \pi/2$ ו- 0 אחרת.

ג. מה הם התכונות של הסכום של טור הסינוסים הכפול של f עבור (x,y) שהם לא בתחום $0 < x, y < \pi$?

9. מצא את הפתרון של המשוואה

$$y'' + 2ky' + \Omega^2 y = f(x)$$

כאשר $0 < k < \Omega$, ו- $f(x)$ ניתן על ידי טור קוסינוסים

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

האם ניתן לכתוב את הפתרון כטור של קוסינוסים? או כטור פוריה?