בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234-01
תרגיל 3

1. מצא את טרנספורם הפוריה של הפונקציות הבאות:
א.

$$f(x)=\begin{cases} h(1-a|x|) & |x|<1/a \\ 0 & |x|>1/a \end{cases}$$

(h,a קבועים חיוביים).
ב.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

2 א. מצא את טרנספורם הפוריה של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

ב. על ידי משפט האינטגרל של פוריה עבור הפונקציה בסעיף א, הוכח ש-

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin w}{\omega}d\omega=\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1 \\ \frac{\pi}{2} & |x|<1 \end{cases}$$

3. הפונקציות $f_n(x),g_n(x),h_n(x)$, $n=1,2,...$, מוגדרת על ידי

$$f_n(x)=\begin{cases} n & |x|<1/2n \\ 0 & |x|>1/2n \end{cases}$$

$$g_n(x)=\frac{n}{2}e^{-n|x|}$$

$$h_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}$$

א. מצא את טרנספורמי הפוריה $F_n(\omega), G_n(\omega), H_n(\omega)$ של $f_n(x), g_n(x), h_n(x)$. (מותר להשתמש בתוצאה שלמדנו בשיעור

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ims}}{1+s^2} ds = \pi e^{-|m|}$$

עבור m ממשי.)

ב. מצא את האינטגרלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)dx$$

(רמז: תחשוב על הטרנספורם ב- $\omega = 0$.)

ג. מצא את הגבולות

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\omega), \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(\omega), \qquad \lim_{n\to\infty} H_n(\omega)$$

ד. האם קיימים הגבולות

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x), \qquad \lim_{n\to\infty} h_n(x) \quad ?$$

(חלק בין $x = 0$ ו- $x \neq 0$.)

4 א. הוכח ש- $f * g = g * f$.

ב. בדוק את משפט הקונבולוציה במקרה

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

5 א. אם טרנספורם הסינוס של $f(x)$ הוא $F_s(\omega)$, מה הוא טרנספורם הסינוס של $f''(x)$?

ב. מצא את טרנספורם הסינוס של $f(x) = e^{-x}$.

ג. השתמש בטרנספורם הסינוס לפתור את הבעייה

$$y'' + y = e^{-x}$$
$$\int_0^{\infty} |y(x)|dx < \infty$$

6 א. צייר את הפונקציה $\sin(x-ct)$ עבור $t = 0, \pi/8c, \pi/4c$. הסבר, מהתמונות, למה נקראת הפונקציה הזאת "גל שזז לימין". למה נקראת הפונקציה $\sin(x+ct)$ "גל שזז לשמואל"?

ב. בדוק ששתי הפונקציות $\sin(x-ct)$, $\sin(x+ct)$ מקיימים את משוואת הגלים

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ג. הוכח שהפונקציה $u(x,t) = \sin x \cos ct$ גם פותר את משוואת הגלים. האם זה סותר את מה שלמדנו, שהפתרון הכללי למשוואת הגלים היא $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$?

7 א. הוכח ש- $u(x,y,z) = 1/r$ פותר את משוואת לפלס בשלושה מימדים

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = 0$$

חוץ מבנקודה $r = 0$. (כאן $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ כרגיל.)

ב. הוכח שגם $u(x,y,z) = 1/|\vec{r} - \vec{r_0}|$ פותר את המשוואה, כאשר $\vec{r} = (x,y,z)$ ו- $\vec{r_0}$ הוא ווקטור קבוע. מזה הוכח שגם

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n}{|\vec{r} - \vec{r_n}|}$$

פותר את המשוואה, כאשר $e_1, e_2, \ldots, e_N$ הם קבועים, ו- $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_N}$ הם ווקטורים קבועים.

ג. על ידי חשיבת הגבול, כאשר ϵ שואף ל- 0, של הפתרון

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\vec{r} - (0,0,\epsilon)|}\right)$$

הוכח שגם $u(x,y,z) = z/r^3$ הוא פתרון.