בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234-01
תרגיל 4

1. פתור את משוואת החום

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

בתחום $0 < x < 2\pi \ , \ t > 0$ עם תנאי השפה

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = \pi^2 - (x-\pi)^2$$

2. פתור את משוואת החום

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

בתחום $0 < x < L \ , \ t > 0$ עם תנאי השפה

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$
$$u(x,0) = x^2(L-x)^2$$

מה צורת הפתרון בגבול $t \to \infty$?

3. פתור את משוואת הגלים

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$0 < x < L, \ t > 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

עם תנאי התחלה הבאים:

א.

$$u(x,0) = \begin{cases} \alpha x & 0 \le x \le L/2 \\ \alpha(L-x) & L/2 \le x \le L \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

(α קבוע.)

ב.

$$u(x,0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} \alpha n & |x - L/2| < 1/2n \\ 0 & |x - L/2| \geq 1/2n \end{cases}$$

(α, n קבועים, עם $n >> 1/L$.)

4. פתור את משוואת הגלים

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$0 < x < \infty, \ t > 0$$
$$u(0,t) = 0$$

עם תנאי התחלה

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

(יש להניח של- $f(x)$ ול- $g(x)$ קיימים טרנספורמי סינוס.)

5. על ידי טרנספורם פוריה ביחס ל- x , הוכח שפתרון הבעיה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < y < a, -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = 0$$
$$u(x,a) = f(x)$$

ניתן על ידי

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a} d\omega \right) du$$

(יש להניח שיש ל- $f(x)$ טרנספורם פוריה, ואין צורך להצדיק את שינוי סדר האינטגרציה באינטגרלים הכפולים שמופיעים.)

6. א. מצא נוסחה ללפלסיאן הדו-מימדי

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

בקואורדינטות קוטביות r, θ, המוגדרות על ידי

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(פתרון:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad)$$

ב. מצא פתרונות למשוואת לפלס $\nabla^2 u = 0$ בצורה $u = R(r)\Theta(\theta)$. איזה מהפתרונות שמצאת מוגדרים ב- $r = 0$?

ג. פתור את משוואת לפלס $\nabla^2 u = 0$, בתחום $r < R$, עם תנאי השפה $u(r = R, \theta) = f(\theta)$, כאשר f היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π.

7. ראינו שפתרון אחד של משוואת לז'נדר

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l + 1)y = 0$$

(l שלם) הוא פולינום לז'נדר $P_l(x)$. במקרים $l = 0, 1, 2$ מצא את הפתרון הכללי של המשוואה. מה קורה בנקודות $x = \pm 1$?

8. אפשר להגדיר את פולינומי לז'נדר על ידי התכונות

א. ש- $P_l(x)$ הוא פולינום מסדר l , עם $P_l(1) = 1$.

ב. שעבור כל פולינום $p(x)$ מדרגה פחות מ- l

$$\int_{-1}^{1} p(x)P_l(x)dx = 0$$

על ידי ההגדרה הזאת, מצא את $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$.