בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234-01
סמסטר ב, תשנ"ז: מועד א

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. א. מצא את הפתרון של

$$y' + y = e^{-ax}, \qquad y(0) = 0$$

במקרה $a = 1$ ובמקרה $a \neq 1$. בדוק שכאשר $a \to 1$, הפתרון עם $a \neq 1$ שואף לפתרון עם $a = 1$.

ב. מצא את הפתרון שמקיים את תנאיי ההתחלה $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ של המשוואות הבאות:

$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$y'' + 2y' + (1 + a^2)y = 0$$
$$y'' + 2y' + (1 - a^2)y = 0$$

(a קבוע חיובי).

בדוק שבגבול $a \to 0$ הפתרונות של המשוואה השנית והמשוואה השלישית שואפות לפתרון של המשוואה הראשונה.

2. מצא את טור הפוריה של הפונקציה

$$f(x) = \cosh \alpha x \qquad -\pi < x < \pi$$

(תזכורת: $\cosh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$.)

על ידי חשיבת סכום טור הפוריה ב-$x = 0$ ו-$x = \pi$, הוכח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\alpha\pi \cosh \alpha\pi - \sinh \alpha\pi}{(\alpha\pi)^2 \sinh \alpha\pi} \right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\alpha\pi - \sinh \alpha\pi}{(\alpha\pi)^2 \sinh \alpha\pi} \right)$$

3. א. הוכח שאם טרנספורם הפוריה של $f(x)$ הוא $F(\omega)$, אזי (תחת תנאיים מסויימים שאין צורך להתייחס להם)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F(-\omega)d\omega$$

ב. מצא את טרנספורם הפוריה של

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

ג. על ידי התוצאות של הסעיפים הקודמים, הוכח ש-

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = 1$$

4. א. הוכח ש

$$u(x,t) = \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\exp\left(-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 t\right)$$

פותר את משוואת החום

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

וגם מקיים את תנאיי השפה $u(0,t) = (\partial u/\partial x)(\pi,t) = 0$. ($n$ הוא שלם לא שלילי.)

ב. הוכח ש-

$$\int_0^{\pi} \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\sin\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(m, n שלמים לא שליליים.)

ג. על ידי צירוף ליניארי של הפתרונות מסעיף א., מצא פתרון למשוואת החום עם תנאיי שפה הנתונים, ותנאי ההתחלה

$$u(x,0) = f(x)$$

($f(x)$ פונקציה נתונה).

בהצלחה!