בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234
סמסטר ב, תשנ"ח: מועד א

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. פתור את המשוואות הדפרנציאליות הבאות:
   א. $y' \sin x - y \cos x = x$
   ב. $y'' - 4y' + 5y = x + e^{2x}$
   ג. $y'' + (\tan x - \cos x)y' = \cos^2 x$ (פתרונות של ההומוגנית: $1, e^{\sin x}$)

2. מצא את טור הסינוסים של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x < \pi \end{cases}.$$

שרטט גרף של סכום הטור על הקטע $[-3\pi, 3\pi]$. על ידי חישוב הטור ב-$x = \pi/2$ הוכח ש-

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

3. הפונקציות f ו-g מוגדרות על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-mx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} x e^{-mx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(כאן m הוא קבוע חיובי).
   א. מצא את טרנספורם הפורייה של f ושל g.
   ב. על ידי חישוב ישיר (בלי להשתמש בטרנספורמי פורייה) הוכח שהקונבולוציה של f עם עצמו הוא g.
   ג. הסבר למה התוצאה שקבלת בסעיף ב. נובעת מיידית מהטרנספורמים שחישבת בסעיף א.

4. א. מצא את טור הקוסינוסים של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

ב. וודא שהפונקציה $u(x,t) = \cos(nx)\mathrm{e}^{-n^2 t}$ פותר את המשוואה

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

וגם מקיימת את תנאי השפה

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$$

(כאן n הוא שלם לא שלילי).

ג. על ידי צירוף ליניארי של הפונקציות $u(x,t)$ מסעיף ב. ושימוש בתוצאות של סעיף א., מצא פתרון לבעיה

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

(כאן $f(x)$ היא הפונקציה המוגדרת בסעיף א.)

בהצלחה!