בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

אנליזה שימושית, 88-234
סמסטר ב, תשנ"ח: מועד ב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-3 שאלות מספיקים לציון מצוין. פתרון לשאלה רביעית רק יוסיף.

1. א. אם a הוא קבוע, $a \neq 0$, פתור את המשוואה

$$y' = \frac{y}{(x-a)(x+a)}$$

ואת הבעיה

$$y' - \frac{y}{(x-a)(x+a)} = -\frac{1+2a}{(x-a)^2} \ , \qquad y(0) = 1$$

מה הוא הפתרון של הבעיה האי-הומוגנית במקרה $a = 0$?
מה הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית במקרה $a = 0$?

ב. פתור את המשוואה $y'' - 5y' + 6y = e^x + 1$

2. א. מצא שני פתרונות לא תלויים ליניארית של המשוואה

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

ב. מצא פונקציה g כך ש-

$$y(x) = \int_0^x g(x-t)b(t)dt$$

פותר את הבעיה

$$y'' + 6y' + 13y = b(x)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

ג. פתור את הבעיה בסעיף ב. במקרה $b(x) = x$ (רמז: עדיף לא להשתמש בנוסחה הכללית שמצאת, אלא לנחש פתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית)

3. מצא את טור הסינוסים ואת טור הקוסינוסים של הפונקציה

$$f(x) = x^3 \qquad 0 \le x \le 1$$

שרטט גרפים של הסכומים של שני הטורים על הקטע $[-3, 3]$. של איזה טור הסכום רציף? איזה טור מתכנס יותר מהר?

4. הפונקציות f ו-g מוגדרות על ידי

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (e^2 - 1)e^x & x \le -1 \\ 2e - (e^x + e^{-x}) & -1 < x < 1 \\ (e^2 - 1)e^{-x} & x \ge 1 \end{cases}$$

א. מצא את טרנספורם הפורייה של f ושל g.
ב. וודא ש-g ו-g' רציפים ב-$x = \pm 1$.
ג. על ידי טרנספורם פורייה, מצא את הפתרון היחיד של המשוואה $-y'' + y = 2ef(x)$ שעבורו קיים טרנספורם פורייה.

בהצלחה!