

זמן המבחן: שעתיים וחצי.  
מוותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.  
משקלה של כל שאלה 20 נקודות.  
מוותר לענות על כל השאלות, חמשת השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי.  
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = y - 2qxy^3$$

כאשר  $q$  הוא קבוע חיובי.

מצא את הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה  $y(0) = -1$ . האם פתרון זה מוגדר לכל  $x$  ממשי? אם כן, מהו  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ ?

2. למשוואה

$$y'' + 4y = 2 \tan x$$

יש פתרון פרטי

$$y(x) = -x \cos 2x + \ln |\cos x| \cdot \sin 2x$$

הראה איך מוצאים פתרון זה על ידי שיטת ווריאצית מקדמים, ומצא את הפתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

כאשר  $A, B$  הם קבועים נתונים.

3. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' - 2y' + (1 + p^2)y = e^x + e^{-x}$$

כאשר  $p$  הוא קבוע חיובי.

(ב) מצא את הפתרון הפרטי של המשוואה בסעיף (א) המקיים את תנאי ההתחלה

$$y(0) = y'(0) = 0$$

(ג) על ידי חישוב הגבול כאשר  $p$  שואף ל-0 של התשובה לסעיף (ב), או אחרת, פתור את הבעיה

$$y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

4. (א) אם  $a, b$  הם קבועים, מצא תנאי על  $a$  ו/או  $b$  כך שקיים פתרון למשוואה

$$y'(t) + ay(t) = tb$$

בצורה  $y(t) = c_1t + c_2$  עם קבועים  $c_1, c_2$ .

(ב) אם  $M$  היא מטריצה קבועה ו- $v$  הוא וקטור קבוע, מצא תנאי על  $M$  ו/או  $v$  כך שקיים פתרון למערכת

$$y'(t) + My(t) = tv$$

בצורה  $y(t) = c_1t + c_2$  עם וקטורים קבועים  $c_1, c_2$ .

(ג) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$y'(t) + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

5. פתור, על ידי שיטת פרובניוס, את המשוואה

$$x^2(2-x)y'' + x(1+x)y' - 3y = 0$$

(יש למצוא את הפתרונות כטורי חזקות מסביב לנקודה  $x = 0$ .)

6. (א) אם התמרת הלפלס של  $f(t)$  היא  $F(s)$ , מהן התמרות הלפלס של  $f'(t)$ , של  $f''(t)$  ושל  $tf''(t)$ ? (אין צורך להוכיח את התוצאות, רק לצטט אותן.)

(ב) אם הפונקציה  $f(t)$  פותרת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0$$

הוכח שהתמרתה,  $F(s)$ , פותרת את המשוואה

$$(1 + s^2)F' + sF = 0$$

(ג) פתור את המשוואה ל- $F$  מהסעיף הקודם. האם זה סביר שהמשוואה ל- $F$  יצאה להיות מסדר ראשון, למרות שהמשוואה ל- $f$  היא מסדר שני?

בהצלחה!