משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240, פרופ' ג'. שיף
מועד א', סמסטר א', תשע"א - פתרונות

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = y - 2qxy^3$$

כאשר q הוא קבוע חיובי.

מצא את הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = -1$. האם פתרון זה מוגדר לכל x ממשי ? אם כן, מהוא $\lim_{x\to\infty} y(x)$?

משוואת ברנולי. נכתוב בצורה

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} - 2qx$$

ונציב $z = \frac{1}{y^2}$ לקבל

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = z - 2qx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = -2z + 4qx$$

נציב $z = e^{-2x}w$ לקבל

$$-2e^{-2x}w + e^{-2x}\frac{dw}{dx} = -2e^{-2x}w + 4qx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dw}{dx} = 4qxe^{2x}$$

ולכן

$$w(x) = \int 4qxe^{2x}\ dx = q(2x-1)e^{2x} + C$$

רוצים $y(0) = -1$ ולכן $z(0) = w(0) = 1$. לכן יש לבחור $C = 1 + q$ ו-

$$\begin{aligned} w(x) &= 1 + q\left(1 + (2x-1)e^{2x}\right) \\ z(x) &= e^{-2x} + q\left(e^{-2x} + 2x - 1\right) \\ y(x) &= -\frac{1}{\sqrt{e^{-2x} + q\left(e^{-2x} + 2x - 1\right)}} \end{aligned}$$

שים לב שיש לבחור סימן שלילי! כי רוצים $y(0) = -1$.

יש לשים לב ש- $\frac{dw}{dx} = 0$ רק כאשר $x = 0$. ויש ל- $w(x)$ מינימום ב- $x = 0$ היות ו- $z(x)$ גדל כאשר x גדל. ולכן $z(x) \geq z(0) = 1$ לכל x והפונקציה $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$ היא מוגדרת לכל x.

מהנוסחה ל- $y(x)$ רואים ש-

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

---

2. למשוואה

$$y'' + 4y = 2\tan x$$

יש פתרון פרטי

$$y(x) = -x\cos 2x + \ln|\cos x| \cdot \sin 2x$$

הראה איך מוצאים פתרון זה על ידי שיטת ווריאציית מקדמים, ומצא את הפתרון של המשוואה המקיים את תנאיי ההתחלה

$$y(0) = A\ , \qquad y'(0) = B$$

כאשר A, B הם קבועים נתונים.

פתרונות של ההומוגני:

$$y_1(x) = \cos 2x\ , \qquad y_2(x) = \sin 2x$$

ווריאציית מקדמים: הפתרון הוא $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ כאשר

$$\begin{aligned} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x &= 0 \\ -2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x &= 2\tan x \end{aligned}$$

זה נותן

$$C_1' = -\tan x\sin 2x = -2\sin^2 x\ , \qquad C_2' = \tan x\cos 2x$$

ולכן

$$\begin{aligned} C_1 &= -\int(1-\cos 2x)\ dx = -x + \frac{1}{2}\sin 2x + K_1 \\ C_2 &= \int \tan x\left(2\cos^2 x - 1\right)\ dx = \int(\sin 2x - \tan x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \ln|\cos x| + K_2 \end{aligned}$$

מזה, עם $K_1 = K_2 = 0$ נובע הפתרון המבוקש. יש לשים לב ש- $y(0) = 0$ ו- $y'(0) = -1$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = -x\cos 2x + \ln|\cos x|\sin 2x + A\cos 2x + \frac{1}{2}(B+1)\sin 2x$$

כאשר $A = y(0)$, $B = y'(0)$.

---

3. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' - 2y' + (1+p^2)y = e^x + e^{-x}$$

כאשר p הוא קבוע חיובי.

(ב) מצא את הפתרון הפרטי של המשוואה בסעיף (א) המקיים את תנאיי ההתחלה

$$y(0) = y'(0) = 0$$

(ג) על ידי חישוב הגבול כאשר p שואף ל- 0 של התשובה לסעיף (ב), או אחרת, פתור את הבעיה

$$y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}\ , \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

(א) קודם כל נפתור את הבעיה ההומוגנית $y_c'' - 2y_c' + (1+p^2)y_c = 0$. משוואה מאפיינת:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + p^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-1)^2 + p^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm pi$$

ולכן פתרון ההומוגני

$$y_c = e^x\left(C_1 \cos px + C_2 \sin px\right)$$

כאשר C_1, C_2 קבועים. מחפשים פתרון פרטי של הבעיה האי-הומוגנית בצורה $y = Ae^x + Be^{-x}$ כדי שזה יהיה פתרון יש לדרוש

$$\Big(1 - 2 + (1+p^2)\Big)A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{p^2}$$

$$\Big(1 + 2 + (1+p^2)\Big)B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{1}{4+p^2}$$

ולכן פתרון סופי

$$y = e^x(C_1 \cos px + C_2 \sin px) + \frac{e^x}{p^2} + \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

(ב) אם גוזרים יש לנו ש-

$$y' = e^x(C_1 \cos px + C_2 \sin px) + pe^x(-C_1 \sin px + C^2 \cos px) + \frac{e^x}{p^2} - \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

ולכן התנאים $y(0) = y'(0) = 0$ נותנים

$$0 = C_1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4+p^2}\ , \qquad 0 = C_1 + pC_2 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4+p^2}$$

כלומר

$$C_1 = -\frac{4+2p^2}{p^2(4+p^2)}\ , \qquad C_2 = \frac{2}{p(4+p^2)}$$

והפתרון הוא

$$y = e^x\left(-\frac{4+2p^2}{p^2(4+p^2)}\cos px + \frac{2}{p(4+p^2)}\sin px\right) + \frac{e^x}{p^2} + \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

(ג) נכתוב את זה בצורה

$$y = \frac{e^x}{4+p^2}\left(\frac{-(4+2p^2)\cos px + 2p\sin px + 4 + p^2}{p^2}\right) + \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

הבעיה היחידה בשאיפת p ל- 0 היא למצוא את הגבול של האיבר בסוגריים הגדולים. אפשר על ידי לופיטל פעמיים. או לשים לב שהמונה שווה

$$\begin{aligned} & -(4+2p^2)\left(1 - \frac{p^2x^2}{2} + O(p^4)\right) + 2p\left(px + O(p^3)\right) + 4 + p^2 \\ = \quad & p^2\left(2x^2 + 2x - 1\right) + O(p^4) \end{aligned}$$

ולכן בגבול $p \to 0$ יש לנו

$$y \to \frac{e^x}{4}(2x^2 + 2x - 1) + \frac{e^{-x}}{4}$$

---

4. (א) אם a, b הם קבועים, מצא תנאי על a ו/או b כך שקיים פתרון למשוואה

$$y'(t) + ay(t) = tb$$

בצורה $y(t) = c_1 t + c_2$ עם c_1, c_2 קבועים.

(ב) אם M היא מטריצה קבועה ו- $\mathbf{v}$ הוא ווקטור קבוע, מצא תנאי על M ו/או $\mathbf{v}$ כך שקיים פתרון למערכת

$$\mathbf{y}'(t) + M\mathbf{y}(t) = t\mathbf{v}$$

בצורה $\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$ עם $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ ווקטורים קבועים.

(ג) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}'(t) + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

(א) יש לדאוג ש-

$$c_1 + a(c_1 t + c_2) = bt$$

שניתן לעשות על ידי בחירת $c_1 = \frac{b}{a}$, $c_2 = -\frac{b}{a^2}$ בתנאי ש- $a \neq 0$.

(ב) כמו כן יש לדאוג ש

$$\mathbf{c}_1 + M(\mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2) = t\mathbf{v}$$

שעושים על ידי בחירת $\mathbf{c}_1 = M^{-1}\mathbf{v}$ ו- $\mathbf{c}_2 = -M^{-2}\mathbf{v}$ בתנאי ש- $\det M \neq 0$.

(ג) קודם כל יש למצוא פתרון של הבעיה ההומוגנית

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

שים לב! מינוס המטריצה הכתובה בשאלה!! נמצא ערכים עצמיים של המטריצה:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda+3 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix} &= (\lambda+3)\left((\lambda+2)^2 - 2\right) + 2 \\ &= (\lambda+3)(\lambda^2+4\lambda+2) + 2 \\ &= \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+8) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4) \end{aligned}$$

ולכן פתרון הבעיה ההומונית הוא

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{v_1}e^{-t} + C_2\mathbf{v_2}e^{-2t} + C_3\mathbf{v_3}e^{-4t}$$

כאשר $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ הם הווקטרים העצמיים, שיש למצוא, לקבל פתרון של ההומוגני

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

יוצא שהווקטור בצד ימין של המערכת האי הומוגנית הוא ווקטור עצמי של המטריצה. ולכן, לאור שני הסעיפים הראשונים, נחפש פתרון פרטי בצורה

$$\mathbf{y} = (c_1 t + c_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מציבים למצוא שיש לקחת $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ והפתרון של האי-הומוגני הוא

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

5. פתור, על ידי שיטת פרובניוס, את המשוואה

$$x^2(2-x)y'' + x(1+x)y' - 3y = 0$$

(יש למצוא את הפתרונות כטורי חזקות מסביב לנקודה $x=0$.)

נחפש פתרונות בצורה

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \ , \qquad a_0 \neq 0$$

יש לנו ש-

$$2x^2y'' + xy' - 3y = \sum_{n=0}^{\infty}(2(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) - 3)a_n x^{n+\alpha}$$

ו-

$$-x^3y'' + x^2y' = \sum_{n=0}^{\infty}(-(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha))a_n x^{n+\alpha+1}$$

רק בטור הראשון מופיע החזקה x^α, עם מקדם

$$2\alpha(\alpha-1) + \alpha - 3 = 2\alpha^2 - \alpha - 3 = (2\alpha-3)(\alpha+1)$$

ולכן יש שתי אפשרויות: $\alpha=-1$ או $\alpha = \frac{3}{2}$.

כאשר $\alpha=-1$ יש לדרוש

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-5)na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(3-n)a_n x^n = 0$$

על ידי השוואת המקדם של x^n בשני הטורים יש לנו ש-

$$(2n-3)(n+1)a_{n+1} + (n-1)(3-n)a_n = 0 \ , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

מוצאים ש- $a_1 = -a_0$ ו- $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. לכן יש פתרון

$$y_1(x) = \frac{1}{x} - 1$$

קל לבדוק שזה אכן פתרון מדויק.

כאשר $\alpha = \frac{3}{2}$ יש לדרוש

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+5)na_n x^{n+3/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(2n+3)(2n-1)a_n x^{n+5/2} = 0$$

ולכן

$$(2n+7)(n+1)a_{n+1} = \frac{1}{4}(2n+3)(2n-1)a_n \ , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3\cdot(-1)}{4\cdot 7\cdot 1}a_0 \\
a_2 &= \frac{5\cdot 1}{4\cdot 9\cdot 2}a_1 = -\frac{(3\cdot 5)(1)}{4^2\cdot(7\cdot 9)\cdot(1\cdot 2)}a_0 \\
a_3 &= -\frac{(3\cdot 5\cdot 7)(1\cdot 3)}{4^3\cdot(7\cdot 9\cdot 11)\cdot(1\cdot 2\cdot 3)}a_0 \\
&\vdots \\
a_n &= -\frac{15(2n+1)!!(2n-3)!!}{4^n(2n+5)!!n!}a_0
\end{aligned}$$

ולכן יש פתרון שני

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{3/2} - 15\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!(2n-3)!!}{4^n(2n+5)!!n!}x^{n+3/2} \\ &= x^{3/2} - \left(\frac{3}{28}x + \frac{5}{672}x^2 + \frac{5}{4224}x^3 + \dots\right)x^{3/2} \end{aligned}$$

---

6. (א) אם התמרת הלפלס של $f(t)$ היא $F(s)$, מהן התמרות הלפלס של $f'(t)$, של $f''(t)$ ושל $tf''(t)$? (אין צורך להוכיח את התוצאות, רק לצטט אותן.)

(ב) אם הפונקציה $f(t)$ פותרת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0$$

הוכח שהתמרתה, $F(s)$, פותרת את המשוואה

$$(1+s^2)F' + sF = 0$$

(ג) פתור את המשוואה ל-F מהסעיף הקודם. האם זה סביר שהמשוואה ל- F יצאה להיות מסדר ראשון, למרות שהמשוואה ל- f היא מסדר שני ?

(א)

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow sF(s) - f(0) \\ f''(t) &\rightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ tf''(t) &\rightarrow -\frac{d}{ds}\Big(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\Big) = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0) \end{aligned}$$

(ב) עושים התמרה של המשוואה ומקבלים

$$\Big(-2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)\Big) + (sF(s) - f(0)) - F'(s) = 0$$

האיברים עם $f(0)$ מצתמצמים ונשאר

$$(1+s^2)F' + sF = 0$$

(ג) הפרדת משתנים:

$$\frac{F'}{F} = -\frac{s}{1+s^2}$$

עושים אנטגרל לשני הצדדים:

$$\ln F = -\frac{1}{2}\ln(1+s^2) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{K}{\sqrt{1+s^2}}$$

כאשר K הוא קבוע.

למשוואה המקורית ל- f יש נקודה סינגולרית ב- $t=0$. ולכן לא מובטח שכל הפתרונות מוגדרים היטב ב- $t=0$, ואם לא, יכול להיות שלא קיים התמרת לפלס לכל פתרון. המשוואה היא דווקא משוואת בסל מסדר 0. יש פתרון אחד $J_0(t)$ מוגדר היטב ב- $t=0$ והפתרון השני $Y_0(t)$ מתבדר שם. קבלנו את ההתמרה $F(s)$ של $J_0(t)$
