

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.
משקלה של כל שאלה 20 נקודות.
מותר לענות על כל השאלות, חמשת השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y' - ay = xe^{bx}, \quad a \neq b$$

(א) על ידי ההצבה $y(x) = z(x)e^{ax}$

(ב) על ידי שיטת התמרת לפלס.

2. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

(ב) מצא נוסחה לפתרון הבעיה

$$y'' - 2y' + y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(ג) האם ניתן למצוא פתרון פרטי של המשוואה בסעיף (א) על ידי שימוש בנוסחה מסעיף (ב)?

3. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'''' - 3y''' - 4y' = 0$$

(ב) מצא משוואה דפרנציאלית עם מקדמים ממשיים קבועים שיש לו פתרון

$$(x^2 + 1)e^{2x} \cos 4x$$

וכתוב את הפתרון הכללי של המשוואה שמצאת.

4. (א) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(ב) מצא פתרון פרטי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + g(t) \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix}$$

כאשר $g(t)$ היא פונקציה נתונה

5. למשוואה

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 0$$

(א) מצא את הפתרון הכללי כטור חזקות מסביב ל- $x = 0$.

(ב) הוכח ש- $y(x) = f(x^3)$ הוא פתרון אם $f(z)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית

$$2zf'' + (z+2)f' + \frac{2}{3}f = 0$$

האם למשוואה זאת יש פתרונות אנליטיים ב- $x = 0$?

6. למשוואה

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$$

(א) בהנתן ש- $y = x$ הוא פתרון, מצא את הפתרון הכללי

(ב) מצא את הפתרון הכללי על ידי שיטת פרובניוס.

בהצלחה!