

1. (א) הוכח שניתן לכתוב את משפט הבינום של ניוטון בצורה

$$(1+x)^a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-i)\Gamma(i+1)} x^i \quad |x| < 1$$

כאן a אינו שלם, אבל יש להסביר באיזה מובן הנוסחה היא נכונה גם כאשר a הוא שלם לא שלילי.

(ב) הוכח, על ידי הצבות באנטגרל הרלוונטי, ש-

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\log z}}$$

2. הוכח מיחסי הרקורסיה לפונקציות בסל

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) &= \frac{2nJ_n(x)}{x} \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) &= -2J'_n(x) \end{aligned}$$

ש- $J_n(x)$ מקיים את משוואת בסל

$$x^2 J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

3. הוכח את יחסי הרקורסיה לפונקציות בסל מהייצוג האנטגרלי של פונקציות בסל

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

4. כאשר $n, \nu = n + \frac{1}{2}$ שלם לא שלילי, הוכח שניתן לכתוב כל פתרון של משוואת בסל

$$x^2 J''_\nu(x) + xJ'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2)J_\nu(x) = 0$$

בצורה

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} j_n(x)$$

כאשר $j_n(x)$ פותר את המשוואה

$$x^2 j''_n(x) + 2xj'_n(x) + (x^2 - n(n+1))j_n(x) = 0$$

(קוראים לפונקציות $j_n(x)$ פונקציות בסל כדוריות). הוכח ש-

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}$$

הוא פתרון של משוואה זו, ומצא במפורש את j_0, j_1, j_2 .

5. הוכח מיחסי הרקורסיה לפולינומי לז'נדר

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) & n = 1, 2, \dots \\ \frac{x^2-1}{n}P'_n(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x)\end{aligned}$$

ש- $P_n(x)$ מקיים את משוואת לז'נדר

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

6. (א) העזר בפונקציה היוצרת של פולינומי לז'נדר למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

(ב) העזר בנוסחת רודריגס למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

(ג) העזר ביחס הרקורסיה הראשון של פולינומי לז'נדר למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

בהצלחה!