

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} \quad (\text{א})$$

$$y' = \frac{x^3 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{xy \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{ב})$$

$$y' = -\frac{x + y - 2}{x - y + 4} \quad (\text{ג})$$

2. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$y' = y + (1 - 2x)/y \quad (\text{א})$$

$$y' = -2y/x + x^2 y^4 \quad (\text{ב})$$

$$y' = y + \sin 2x/y^2 \quad (\text{ג})$$

3. (א) $y = \sin x$ הוא פתרון המשוואה

$$y' = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}$$

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

(ב) $y = \frac{k}{x}$ הוא פתרון המשוואה

$$y' = \frac{2}{x^2} - y^2$$

עבור שני ערכים קבועים של k . מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

4. אוכלוסיה $n(t)$ של בקטריות מקיימת את המשוואה הלוגיסטית

$$\frac{dn}{dt} = an - bn^2$$

(כאשר a, b קבועים חיוביים).

(א) הוכח שהפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$n(t) = \frac{a}{b + ce^{-at}}$$

כאשר c הוא קבוע חופשי.

(ב) הוכח ש

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = \frac{a}{b}$$

(ג) אם נתון ש- $n(0) = 2000$, $n(1) = 4000$ ו- $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = 10000$, מצא את a, b, c .

5. הוכח שאם y_1, y_2, y_3, y_4 הם 4 פתרונות שונים זה מזה של משוואת ריקטי

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

אזי

$$q = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_1)}$$

הוא קבוע. הסק מזה שאם y_1, y_2, y_3 הם 3 פתרונות נתונים, אזי ניתן לכתוב כל פתרון אחר בצורה

$$y = \frac{y_2(y_1 - y_3) + C y_1(y_3 - y_2)}{(y_1 - y_3) + C(y_3 - y_2)}$$

כאשר C הוא קבוע. איזה פתרונות מקבלים כאשר $C = 0$, כאשר $C = 1$ ובגבול $C \rightarrow \infty$?

6. הוכח שעל ידי ההצבה

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

ניתן לפתור את המשוואה הדפרנציאלית

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

על ידי הפרדת משתנים. (רמז: מצא את $\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dx} / \frac{d\theta}{dx}$.)

בהצלחה!