

1. (א) הוכח ש $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = e^{-kx}$ מקיימות את המשוואה $y'' = k^2y$ ושאינן תלויות ליניארית (k קבוע חיובי). מצא פתרונות y_3, y_4 המקיימים את תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} y_3(0) &= 1, & y_3'(0) &= 0 \\ y_4(0) &= 0, & y_4'(0) &= 1 \end{aligned}$$

(ב) הוכח ש $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ מקיימות את המשוואה $y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$ ושאינן תלויות ליניארית. מצא פתרון y_3 המקיים את תנאי ההתחלה $y_3(\pi/4) = y_3'(\pi/4) = 1$

2. (א) הוכח שאם y_1, y_2 הן 2 פונקציות גזירות על קטע, כך ש- y_1 אינה מתאפסת בכל הקטע, והוורונסקיאן של y_1, y_2 שווה 0 בכל הקטע, אזי y_1, y_2 הן תלויות ליניארית בקטע.
(ב) הוכח ש-

$$\begin{aligned} W(e^{a_1x}, e^{a_2x}) &= (a_2 - a_1)e^{(a_1+a_2)x} \\ W(e^{a_1x}, e^{a_2x}, e^{a_3x}) &= (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)e^{(a_1+a_2+a_3)x} \\ W(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \dots, e^{a_nx}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)e^{(a_1+a_2+\dots+a_n)x} \end{aligned}$$

(ג) הוכח שעבור בחירה מתאימה של הקבועים a_1, a_2, a_3 הפונקציות $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ מקיימות את המשוואה

$$x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = 0$$

על ידי זה הוכח שהפונקציות $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ אינן תלויות ליניארית אם ורק אם α, β, γ כולם שונים.

3. למשוואות הבאות, ניתן פתרון אחד למשוואה ההומוגנית הקשורה. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות.

$$\begin{aligned} y'' + xy' &= 3x, & 1 \\ xy'' - (x+2)y' + 2y &= x^3 + x, & e^x \\ xy'' + (x+2)y' + y &= e^{-x}, & \frac{1}{x} \\ xy'' + (x-1)y' - y &= 0, & e^{-x} \\ (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y &= 0, & x \end{aligned}$$

בהצלחה!