בס"ד

<u>משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240</u>

<u>תרגילים 4</u>

1. למשוואות הבאות, נתונים שני פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית הקשורה. פתור את המשוואות

$$\begin{aligned} y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} &= x\ln x \qquad x,\ x^2 \\ y'' - \left(2x + \frac{1}{x}\right)y' &= x^4 e^{x^2} \qquad 1,\ e^{x^2} \\ x^2y'' - xy' + y &= x(x+1) \qquad x,\ x\ln|x| \end{aligned}$$

2. $y_1 = e^{-ax}\sin kx$ ו- $y_2 = e^{-ax}\cos kx$ פותרים את המשוואה $y'' + 2ay' + (a^2+k^2)y = 0$. ($a, k$ קבועים חיוביים.) מצא את פתרון בעיית הערכים ההתחלתיים

$$y'' + 2ay' + (a^2+k^2)y = b(x)\ , \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

3. $y_1 = x$ ו- $y_2 = x^2$ פותרים את המשוואה $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. מצא

(א) את פתרון הבעייה $x^2y'' - 2xy' + 2y = b(x)$, $y(a) = y'(a) = 0$. ($b(x)$ פונקצייה נתונה, a קבוע חיובי.)

(ב) את פתרון הבעייה $x^2y'' - 2xy' + 2y = b(x)$, $y(\alpha) = y(\beta) = 0$. ($b(x)$ פונקצייה נתונה, $\beta > \alpha$ קבועים חיוביים.) רמז: שים לב ש- $y_2 - \alpha y_1$ מתאפס כאשר $x = \alpha$ ו- $y_2 - \beta y_1$ מתאפס כאשר $x = \beta$.

4. בהנתן שני פתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ של המשוואה ההומוגנית

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

המקיימים את התנאים $y_1(\alpha) = y_2'(\beta) = 0$, הראה שניתן להציג את פתרון הבעיה

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\ , \qquad y(\alpha) = y'(\beta) = 0$$

($\beta > \alpha$ קבועים) בצורה

$$y(x) = \int_\alpha^\beta Q(x,t)b(t)dt$$

כאשר

$$Q(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{(y_1y_2' - y_2y_1')(t)} & t < x \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{(y_1y_2' - y_2y_1')(t)} & t > x \end{cases}$$

בהצלחה!