

1. פתור את המערכות הבאות:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

הראשון:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

השני:

$$\mathbf{y} = e^{-t} \left(\cos 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \\ A \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A \\ B \end{pmatrix} \right)$$

השלישי:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 t \\ -A_1 + \frac{1}{2}B_1 - B_1 t \end{pmatrix} e^{-t}$$

2. פתור את המערכות הבאות:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 22 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 26 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

הראשון:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

השני:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 22A - 3B \\ -5A + 2B \\ 29A \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 22B + 3A \\ -5B - 2A \\ 29B \end{pmatrix} \sin 2t \right)$$

3. מצא את פתרון המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

עם תנאי התחלה

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = -\frac{e^t}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{37e^{-5t}}{120} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13e^{3t}}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

5. (א) העזר במשפט ליוביל למצוא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(λ קבוע), החל מהעובדה ש-

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

הוא פתרון פרטי.

(ב) העזר במשפט ליוביל למצוא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} f(t) & sf(t) \\ g(t) & sg(t) \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(s קבוע, $f(t), g(t)$ פונקציות נתונות), החל מהעובדה ש-

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא פתרון פרטי.

$$\mathbf{y}(t) = a(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + b(0) \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} + (sb(0) + a(0)) \int_0^t \begin{pmatrix} f(t'') \\ g(t'') \end{pmatrix} e^{\int_0^{t''} (f(t') + sg(t')) dt'} dt''$$