

1. מצא פתרונות בצורה של טורי חזקות מסביב לראשית למשוואת הבאות:

$$\begin{aligned}y'' + xy &= 0 \\y'' - x^2y &= 0 \\y'' + (x-1)y' - y &= 0 \\y'' + x^2y' - 4xy &= 0\end{aligned}$$

2. אם טור החזקות

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

הוא פתרון של משוואת צ'ביצ'ף

$$(1-x^2)y'' - xy' + cy = 0$$

(c קבוע), מהיא הרקורסיה שמקיימים המקדמים a_n ? מצא את התנאי על הקבוע c כך שיהיה פתרון פולינומי. מצא את הפתרון הפולינומי מסדר 8.

3. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות

$$\begin{aligned}x^2y'' - 4xy' + 6y &= 0 \\y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} &= 0 \\x^2y'' - 3xy' + 4y &= 0 \\(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y &= 0 \\(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y &= (1+x)^3\end{aligned}$$

4. (א) הוכח שאם למשוואה הריבועית $\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b = 0$ יש שורש אחד כפול, אזי הפתרון הכללי של משוואת אויילר

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

הוא

$$y = x^\alpha(C_1 + C_2 \ln x)$$

כאשר C_1, C_2 הם קבועים.

(ב) מה הוא התנאי על α כך ש- $y = x^\alpha$ הוא פתרון של משוואת אויילר מסדר 3,

$$x^3y''' + ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

(a, b, c קבועים)?

(ג) כתוב את הפתרון הכללי של משוואת אויילר מסדר 3 מהסעיף הקודם במקרה שיש לתנאי שמצאת

i. 3 שורשים ממשיים שונים

ii. שורש ממשי אחד וזוג שורשים מרוכבים צמודים

iii. שני שורשים ממשיים, אחד מהם כפול

5. מצא את הנקודות הסינגולריות של משוואות הבאות. איזה מהנקודות הסינגולריות הן רגולר-
יות ?

$$xy'' + 2y' + 3y = 0$$

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$$

$$x^2y'' + 2y' + 3xy = 0$$

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

בהצלחה!