משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר א', תשע"ב - פתרונות

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.
משקלה של כל שאלה 20 נקודות.
מותר לענות על כל השאלות, חמש השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. פתור את המשוואות

$$(1+x^2)y' + 3xy = 6x \quad \text{(i}$$
$$xy' = y + \sqrt{x^2-y^2} \quad \text{(ii}$$

לכל משוואה יש למצוא את הפתרון הכללי, ועבור כל פתרון יש למצוא את הערכים של x עבורם הפתרון מוגדר.

(א) משוואה לינארית וגם ניתנה לפרידה!

$$y' = \frac{3x(2-y)}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{3xdx}{1+x^2} \quad \Rightarrow -\ln(2-y) = \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + C$$

או

$$y = 2 - \frac{A}{(1+x^2)^{3/2}}$$

כאשר A הוא קבוע. מוגדר לכל x, לא חשוב מהו הערך של A.

(ב) זה משוואה הומוגנית. נציב $y = zx$. יש לדורש

$$z'x + z = z + \sqrt{1-z^2}$$

ולכן

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \sin^{-1} z + C$$

או

$$z = \sin\left(\ln|x| - C\right)$$

או

$$y = x\sin\left(\ln|x| - C\right)$$

פתרון זה מוגדר כל עוד x לא מגיע ל- 0.

---

2. על ידי ווריאציית מקדמים, הוכח שהפתרון של הבעיה

$$x'' + 2x' + 2x = f(t)\ , \qquad x(0) = 1\ , \quad x'(0) = 0$$

הוא

$$x(t) = \int_0^t e^{t'-t}\sin(t-t')f(t')dt' + e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$

על ידי התמרת הלפלס של המשוואה, הוכח שהתמרת הלפלס $X(s)$ של הפתרון $x(t)$ נתונה על ידי

$$X(s) = \frac{F(s)+s+2}{s^2+2s+2}$$

כאשר $F(s)$ היא התמרת הלפלס של $f(t)$. מה ניתן להסיק לגבי התמרת לפלס ההופכית של

$$\frac{F(s)}{s^2+2s+2} \ \ ?$$

המשוואה המאפיינת היא $\lambda^2+2\lambda+2=0$ עם פתרונות $\lambda=-1\pm i$ ולכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית היא

$$e^{-t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right)$$

לפי עקרון של ווריאציית מקדמים, הפתרון הכללי של האי-הומוגני היא

$$C_1(t)y_1(t)+C_2(t)y_2(t)$$

כאשר $y_1=e^{-t}\cos t$, $y_2=e^{-t}\sin t$ ו-

$$\begin{aligned} y_1C_1'+y_2C_2' &= 0 \\ y_1'C_1'+y_2'C_2' &= f(t) \end{aligned}$$

יש לשים לב שפתרון זה מקיים $y(0)=C_1(0)$ ו- $y'(0)=-C_1(0)+C_2(0)$ ולכן נבחר $C_1(0)=C_2(0)=1$. על ידי החשובים הסטנדרטיים

$$C_1' = -\frac{y_2 f}{y_1y_2'-y_2y_1'}\ , \qquad C_2' = \frac{y_1 f}{y_1y_2'-y_2y_1'}$$

ולכן

$$C_1 = 1-\int_0^t \frac{y_2(t')f(t')}{y_1(t')y_2'(t')-y_2(t')y_1'(t')}\,dt'\ , \qquad C_2' = 1+\int_0^t \frac{y_1(t')f(t')}{y_1(t')y_2'(t')-y_2(t')y_1'(t')}\,dt'\ .$$

ביחד יש לנו

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t)+y_2(t)+\int_0^t \frac{\left(y_1(t')y_2(t)-y_2(t')y_1(t)\right)f(t')}{y_1(t')y_2'(t')-y_2(t')y_1'(t')}\,dt' \\ &= e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))+\int_0^t \frac{e^{-t-t'}\left(\cos t'\sin t-\sin t'\cos t\right)f(t')}{e^{-2t'}}\,dt' \\ &= e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))+\int_0^t e^{t'-t}\sin(t-t')f(t')dt' \end{aligned}$$

אם לוקחים התמרת לפלס של המשוואה מקבלים

$$s^2X-s+2(sX-1)+2X=F$$

שממנו מקבלים מיד ש-

$$X=\frac{F+s+2}{s^2+2s+2}$$

התמרת לפלס של $e^{-t}\cos t$ היא $\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$ והתמרת לפלס של $e^{-t}\sin t$ היא $\frac{1}{(s+1)^2+1}$. ולכן מהשוואת שתי התשובות רואים ש-

$$\frac{F(s)}{s^2+2s+2}$$

היא התמרת הלפלס של

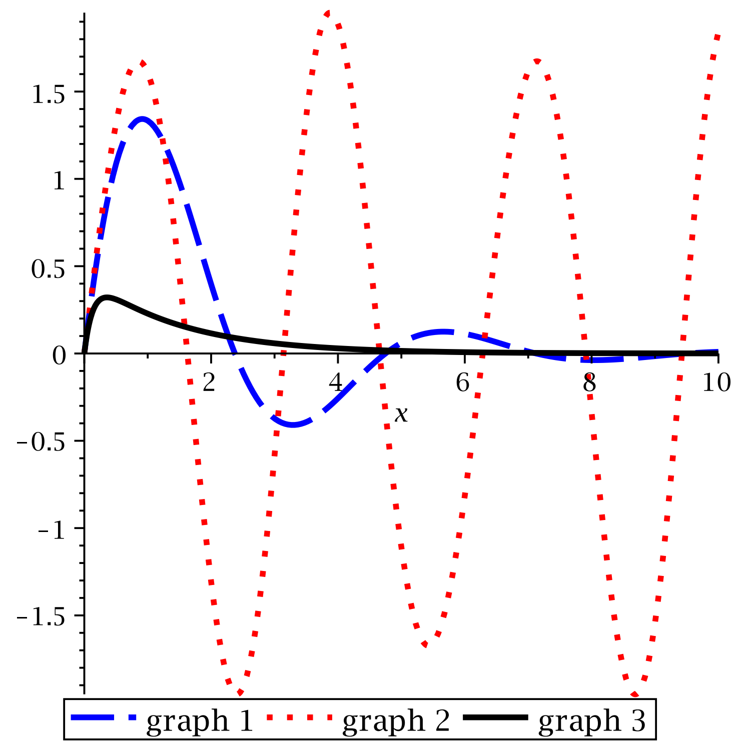
$$\int_0^t e^{t'-t}\sin(t-t')f(t')dt'$$

---

3. באיור בעמוד הבא מופיעים גרפים של הפתרונות של 3 הבעיות הבאות:

$$\begin{aligned} y''+8y'+5y &= 0 \qquad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=3 \\ y''+2y'+2y &= 0 \qquad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=3 \\ y''+4y &= \sin 3x \qquad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=3 \end{aligned}$$

איזה גרף שייך לאיזה משוואה ? יש לנמק היטב את תשובתך .



משוואה ראשונה: המשוואה המאפיינת $\lambda^2+8\lambda+5=0$ עם פתרונות $\lambda=-4\pm\sqrt{11}$. שני שורשים ממשיים שליליים. הפתרון דועך ל-0 ללא תנודות. זה graph 3 - שחור סולידי.

משוואה שנייה: המשוואה המאפיינת $\lambda^2+2\lambda+2=0$ עם פתרונות $\lambda=-1\pm i$. פתרונות מרוכבים, אבל עם חלק ממשי שלילי. הפתרון שואף ל-0 עם עליות וירידות. זה graph 1 - כחול מקווקו עם פסים ארוכים.

משוואה שלישית: המשוואה המאפיינת λ^2+4. פתרון ההומוגני הוא צירוף ליניארי של $\cos 2x$, $\sin 2x$, עם החלק האי-הומוגני מוסיפים עוד תרומה שהוא צירוף של $\cos 3x$, $\sin 3x$. פתרון שלא שואף ל-0. זהו graph 2 - אדום מקווקו

4. מצא טורי חזקות של שני פתרונות בת"ל של המשוואה

$$y'' - xy' - xy = 0$$

לכל פתרון יש לתת את יחס הרקורסיה של המקדמים, ולמצוא באופן מפורש את 4 המקדמים הלא-טריביאליים הראשונים.

נציב

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad , y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

לקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

המקדם של x^0 הוא $2a_2$ ולכן $a_2 = 0$. המקדם של x^n, $n = 1, 2, \ldots$, הוא

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n - a_{n-1}$$

זה צריך להיות 0, ולכן המקדמים מקיימים את הרקורסיה

$$a_{n+2} = \frac{n a_n + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

לפתרון הראשון נקח $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, ואז יש לנו

$$a_2 = 0 \ , \quad a_3 = \frac{1}{6} \ , \quad a_4 = 0 \ , \quad a_5 = \frac{1}{40} \ , \quad a_6 = \frac{1}{180}$$

לפתרון השני נקח $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, ואז יש לנו

$$a_2 = 0 \ , \quad a_3 = \frac{1}{6} \ , \quad a_4 = \frac{1}{12} \ , \quad a_5 = \frac{1}{40}$$

כלומר הפתרונות הם

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \ldots \\ y(x) &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \ldots \end{aligned}$$

---

5. פתור, על ידי שיטת פרובניוס, את המשוואה

$$3xy'' + y' - y = 0$$

יש למצוא שני פתרונות בת"ל. יש לתת נוסחה מפורשת למקדמים של כל טור.

נציב

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}\ , \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}\ , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2}$$

לקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}=0$$

או

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(3n+3\alpha-2)a_n x^{n+\alpha-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}=0$$

המקדם של $x^{\alpha-1}$ הוא $\alpha(3\alpha-2)a_0$ ולכן $\alpha=0$ או $\alpha=\frac{2}{3}$. אלה שני הפתרונות של המשוואה המציינת, והיות וההפרש ביניהם אינו שלם, יהיה פתרון אחד עם כל ערך של α.

המקדם של $x^{n+\alpha}$, $n=0,1,2,\ldots$, הוא

$$(n+1+\alpha)(3n+1+3\alpha)a_{n+1}-a_n$$

ולכן

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1+\alpha)(3n+1+3\alpha)}\ , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

במקרה $\alpha=0$ יש לנו

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3(n+1)\left(n+\frac{1}{3}\right)}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{3\cdot 1\cdot \frac{1}{3}} \\ a_2 &= \frac{a_0}{3^2\cdot 1\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}} \\ a_3 &= \frac{a_0}{3^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n\cdot n!\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

הפתרון (עד כדי כפל בקבוע):

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}$$

במקרה $\alpha=\frac{2}{3}$ יש לנו

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3\left(n+\frac{5}{3}\right)(n+1)}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{3\cdot 1\cdot \frac{5}{3}} \\ a_2 &= \frac{a_0}{3^2\cdot 1\cdot 2\cdot \frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}} \\ a_3 &= \frac{a_0}{3^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{11}{3}} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n\cdot n!\cdot\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)} \end{aligned}$$

הפתרון (עד כדי כפל בקבוע):

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{2}{3}}}{3^n\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)}$$

---

6. מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

מצא גם פתרון פרטי של המערכת

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

יש צורך לחשב את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2-1)-2\lambda-2=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

ולכן יש ערך עצמי כפול -1 וערך עצמי 2.

הווקטור עצמי של הערך עצמי 2 מקיים

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} v_2+v_3&=2v_1 \\ v_1+v_3&=2v_2 \\ v_1+v_2&=2v_3 \end{aligned}$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

הווקטור עצמי של הערך עצמי -1 מקיים

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

יש שני ווקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ולכן הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^{-t}$$

למערכת הלא-הומוגנית נחפש פתרון פרטי בצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

יש לדרוש

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c+e)t + (d+f) \\ (a+e)t + (b+f) \\ (a+c)t + (b+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא סכום של זה ופתרון כללי של ההומוגני.

בהצלחה!