

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

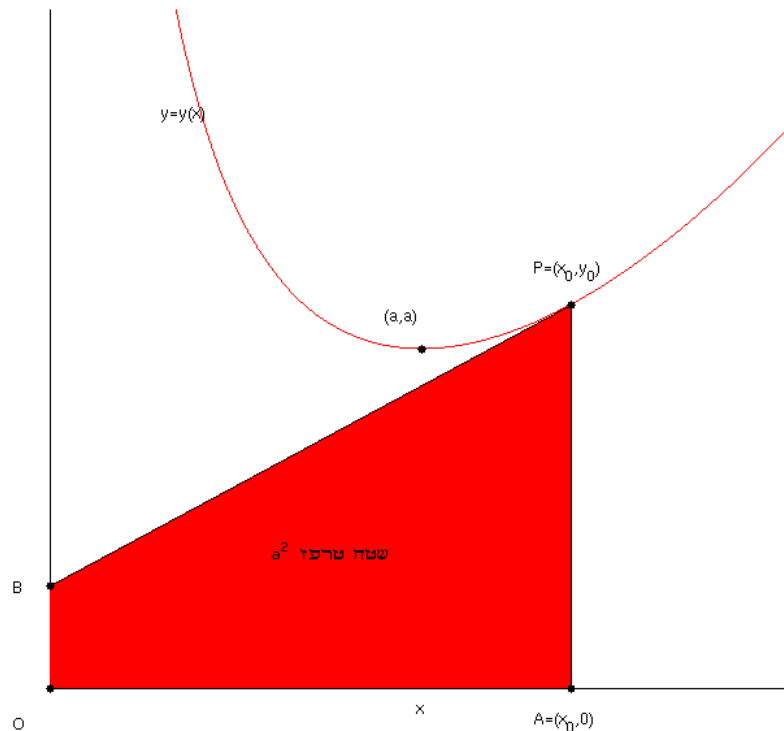
מוותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.

משקלה של כל שאלה 20 נקודות.

מוותר לענות על כל השאלות, חמש השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי. יש לנמק היטב כל תשובה, ולכתוב בכתב ברור ומסודר.

1. עקומה  $y = y(x)$  עוברת דרך הנקודה  $(a, a)$  ומקיימת את התכונה הבאה: הטרפז OAPB הנוצר על ידי המשיק לעקומה בנקודה כלשהיא  $P = (x_0, y_0)$ , ציר ה- $x$ , ציר ה- $y$ , והקו המאונך  $x = x_0$  (ראה איור) הוא בעל שטח  $a^2$ .

- (א) מצא משוואה דפרנציאלית לפונקציה  $y(x)$  הנובעת מהתנאי ששטח הטרפז שווה  $a^2$ .  
 (ב) מצא את פתרון המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה הרלוונטי.



2. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 y' + xy = y^3$ .  
 (ב) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 y' - 1 = \cos 2y$ .  
 (ג) למשוואה בסעיף (א), לאיזה ערכים של  $y_0$  קיים פתרון עם  $y(0) = y_0$ ?  
 (ד) למשוואה בסעיף (ב), לאיזה ערכים של  $y_0$  קיים פתרון עם  $y(0) = y_0$ ?

3. פתור, גם על ידי השיטה הרגילה וגם על ידי שיטת התמרת לפלס את המשוואות הבאות:

$$y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = x^3, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

4. (א) פתור את המשוואה

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = \ln x, \quad x > 0$$

(ב) הוכח שהפונקציות  $\sin x^2, \cos x^2$  הם פתרונות בלתי-תלויים לינארית של המשוואה

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$$

בקטע  $(-\infty, \infty)$ . מצא את הוורונסקיאן של שני פתרונות אלה והראה שהוא שווה 0 כאשר  $x = 0$ . האם שתי עובדות אלה סותרות אחת את השנייה?

5. לשתי המערכות

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

מצא את הפתרון עם  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .

6. פתור על ידי טור חזקות (מסביב ל- $x = 0$ ) את המשוואה

$$2x^2 y'' + (3x - 2x^2) y' - (x + 1) y = 0$$

יש למצוא שני פתרונות בלתי תלויים לינארית

בהצלחה!