

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מוותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.
משקלה של כל שאלה 20 נקודות.
מוותר לענות על כל השאלות, חמש השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. קצת לפני חצות התגלה גוויתו של כנראה קרבן רצח, בחדר עם טמפרטורה מבוקרת 21 מעלות צלזיוס. בחצות הטמפרטורה של הגוויה היתה 28 מעלות, ושעה אחר כך הטמפרטורה ירדה ל- 25 מעלות. בהנחה שהטמפרטורה של הגוויה $T(t)$ מתנהגת לפי המשוואה דפרנציאלית

$$T'(t) = k(T_0 - T(t))$$

כאשר k הוא קבוע, ו- T_0 היא טמפרטורת החדר, ובהנחה שבעת הרצח הטמפרטורה של הגוויה היתה 37 מעלות, מצא את זמן הרצח.

2. (א) למשוואה

$$y'' + xp(x)y' - p(x)y = 0$$

יש פתרון פרטי $y(x) = x$. מצא פתרון שני בלתי תלוי ליניארית.

(ב) אם התשובה לסעיף הקודם היא $Y(x)$, מצא נוסחה לפתרון של הבעיה

$$y'' + xp(x)y' - p(x)y = q(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

3. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות

$$y'' - 2y' + 10y = 10 \cos 3x \quad (\text{א})$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \log x \quad (\text{ב})$$

4. פתור את המשוואה

$$(2x^2 - 1)y'' - 5xy' + 3y = 0$$

יש לחפש פתרונות בצורה של טורי חזקות. פתרון אחד יש למצוא באופן מדוייק, לפתרון השני יש למצוא לפחות 4 איברים לא טריביאליים.

5. פתור את המשוואה

$$2xy'' - y' + y = 0$$

יש לחפש פתרונות כטורי חזקות מוכללים, ולמצוא באופן מפורש את כל המקדמים.

$$\mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}$$

כאשר $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ו- A היא מטריצה קבועה מגודל $n \times n$, יש פתרון

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\sqrt{\lambda}t}$$

כאשר \mathbf{v} הוא ווקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ .
העזר בעובדה זו למצוא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

בהצלחה!