

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.
משקלה של כל שאלה 20 נקודות.
מותר לענות על כל השאלות, חמש השאלות בעלות הציון הגבוה ביותר תקבענה את הציון הסופי.
יש לנמק היטב כל תשובה, ולכתוב בכתב ברור ומסודר.

1. (א) מצא את הפתרון הכללי של

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$$

(ב) מצא את הפתרון הכללי של

$$xy' - 2y = x$$

(ג) למשוואה בסעיף (ב), האם משפט הקיום ויחידות מבטיח שקיים פתרון עם $y(0) = 0$?
האם קיים כזה פתרון, ומהו?

(ד) למשוואה בסעיף (א), האם משפט הקיום ויחידות מבטיח שקיים פתרון עם $y(0) = 0$?
האם קיים כזה פתרון, ומהו?

2. $y = e^x$ הוא פתרון המשוואה

$$x(2 - x)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$$

(א) מצא את הפתרון הכללי.

(ב) מצא את התנאי על a, b כך שקיים פתרון של המשוואה עם $y'(0) = b, y(0) = a$.

(ג) מצא תנאיים על a, b, x_0 כך שקיים פתרון של המשוואה עם $y'(x_0) = b, y(x_0) = a$.

(ד) מצא את הפתרון הכללי של

$$x(2 - x)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = f(x)$$

3. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

(ב) פתור על ידי התמרת לפלס את הבעייה

$$y'''' - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$$

4. (א) מצא משוואה לינארית הומוגנית מסדר 3 עם פתרונות x, x^2, e^x (הכוונה היא למשוואה אחת כך שכל שלושת הפונקציות האלה הן פתרונות שלה).
- (ב) מצא משוואה לינארית הומוגנית מסדר 4 עם מקדמים קבועים עם פתרונות x, x^2, e^x (הכוונה היא למשוואה אחת כך שכל שלושת הפונקציות האלה הן פתרונות שלה).
- (ג) הוכח שכל פתרון של המשוואה שמצאת הסעיף א) הוא פתרון של משוואה שמצאת בסעיף ב).

5. מצא את הפתרון הכללי של שתי המערכות

$$\begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = -x \end{cases}$$

6. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$$

כטור חזקות מסביב ל- $x = 0$ יש לדאוג למצוא שני פתרונות בלתי תלויים לינארית.

בהצלחה!