

## מבחן במשוואות דיפרנציאליות (240-88) סמסטר קיץ מועד ב'

משך המבחן שעתיים וחצי. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).  
ענו על 5 מ-7 השאלות הבאות. הקיפו את התשובה הסופית.

1. יהי  $y_1(x)$  פתרון (שאינו זהותית 0) של משוואת שטורם-ליוביל  $(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y$  עבור  $\lambda$  מסוים, עם תנאי שפה  $y(a) = y(b) = 0$ . לכל  $x \in [a, b]$  מתקיים  $p(x) > 0$ . הוכיחו או תנו דוגמה נגדית: אם  $y_2(x)$  פתרון עבור אותו  $\lambda$ , אזי קיים קבוע  $c$  כך שמתקיים  $y_2(x) = cy_1(x)$ .

2. למדינה חוב חיצוני של  $D(0)$  דולרים בזמן 0. המדינה מחזירה חובות בקצב קבוע של  $k$  דולרים לשניה. הריבית על החוב היא  $r$  (כלומר מדי שניה החוב גדל ב  $rD(t)$  דולרים).

(א) כתבו את המד"ר עבור החוב.

(ב) פתרו את המשוואה.

(ג) מהו התנאי לכך שהמדינה תסיים לשלם את חובותיה תוך זמן סופי?

3. מצאו פתרון כללי:  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2 \sin x$ .

4. פתרו  $(y'')^2 + 5yy'' + 4y^2 = 0$ .

5. נתונה המערכת

$$x' = -4x + 6y + z$$

$$y' = -4x - 6y - 5z$$

$$z' = -4x - 2z$$

(כל הנגזרות הן לפי  $t$ ).

(א) מצאו את הפתרונות.

(ב) נתון  $x(0) = y(0) = z(0) = 2$  מהו  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ ?

6. נתונה המשוואה  $x^3y'' - 4x^2y' + 6xy = x^4$ .

(א) מצאו פתרונות סינגולריים ורגולריים.

(ב) מהו פתרון המשוואה עבור תנאי התחלה  $y(1) = 1, y'(1) = 2$ ?

7. מצאו פתרון כללי כטור סביב 0:  $x^2y'' + 7x^3y' - y = 0$ .

**בהצלחה**