

משוואות דיפרנציאליות 88-240

מבחן מועד ב' סמסטר קיץ תשע"א

משך המבחן: שעתיים וחצי. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 5 מ-7 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירות את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. הוכיחו: בהנתן המד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ המוגדרת בקטע (a, b) . אם קיימת פונקציה $y(x)$ שאינה קבועה כך ש $y(x)$ ו $y^2(x)$ פותרות את המשוואה, אזי ל $y(x)$ אין נקודת קיצון בקטע.

2. בזמן $t = 0$ תרכב א מתחיל לנוע מנקודה $x = x_0$ במהירות קבועה v . רכב ב' מתחיל ממנוחה בנקודה $x = 0$ ותאוצתו פרופורציונית להפרש המהירות בין רכב א' לבינו (עם מקדם פרופורציה $c > 0$).

(א) מהו המיקום של רכב א' כתלות בזמן?

(ב) מהו המרחק בין כלי הרכב כפונקציה של הזמן?

3. פתרו בטור $y'' + (1-x)y' + cy = 0$ כאשר c קבוע כלשהו. מצאו נוסחת נסיגה עבור כל פתרון בלתי תלוי.

4. מצאו את כל הפתרונות: $(y^2 \sin 2x - y^4 \sin x)dx + 2y^3 \cos x dy = 0$.

5. נתונה מערכת המשוואות (הנגזרות כולן לפי t)

$$x' = -3x + 2y - 2z$$

$$y' = -x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z$$

$$z' = x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z$$

(א) מצאו פתרון כללי למערכת המשוואות.

(ב) נתון $x(0) = 8, y(0) = 3, z(0) = 5$. מהו $z(3)$?

6. פתרו: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2$

7. פתרו: $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$

בהצלחה!