

משוואות דיפרנציאליות 88-240 מבחן מועד א' סמסטר א' תשע"ד

משך המבחן: שעתיים וחצי. ניתן להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר.
ענו על 5 מ-6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך,
והקיפו תשובות סופיות.

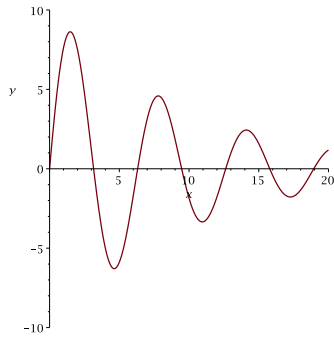
1. נתונה המשוואה $x^2 y' + y = 1$

- (א) הראו כי לכל α קיים למשוואה פתרון יחיד המקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \alpha$.
 (ב) הראו כי קיום ויחידות הפתרון בסעיף הקודם מובטח ע"י משפט הקיום והיחידות
 (רמז: הציבו $z = 1/x$).
 (ג) לאילו ערכים של α קיימים למשוואה זו פתרונות המקיימים $\lim_{x \rightarrow 0} y = \alpha$.
 (ד) האם תוצאת הסעיף הקודם מתיישבת עם משפט הקיום והיחידות?

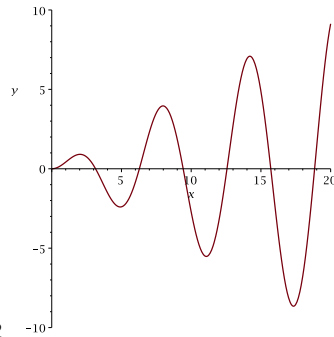
2. פתרו $x^2 y'' - xy' + y = 2x$

3. התאימו לכל אחת מחמש המשוואות הבאות את הגרף המתאר את פתרונה מבין הגרפים להלן:

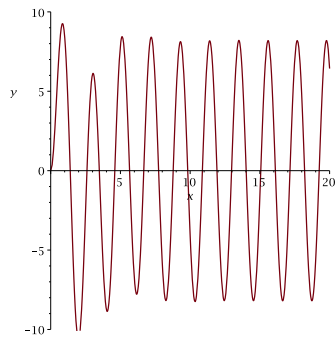
- (א) $y'(0) = 0, y(0) = 9, y'' + y = 0$
 (ב) $y'(0) = 9, y(0) = 0, y'' + y = 0$
 (ג) $y'(0) = 0, y(0) = 0, y'' + y = \cos x$
 (ד) $y'(0) = 0, y(0) = 0, y'' + y' + y = 70 \cos 3x$
 (ה) $y'(0) = 10, y(0) = 0, y'' + \frac{y'}{5} + y = 0$



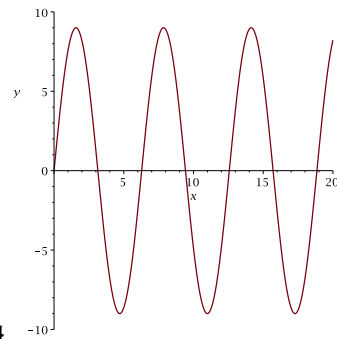
(2)



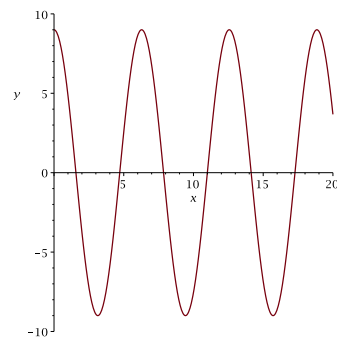
(1)



(4)



(3)



(5)

.4

(א) מצאו את הפתרון הכללי למערכת $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ב) הראו באופן כללי כי אם למטריצה B יש ערך עצמי כפול, λ , עם וקטור עצמי יחיד, v , אז יש למערכת $y' = By$ פתרון מהצורה $y = (vx + w)e^{\lambda x}$ כאשר w וקטור מתאים.

5. השתמשו בטרנספורם לפלס על מנת לפתור את המשוואה $y'''' - y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$.

6. פתרו בשיטת פרוביניוס את המשוואות:

(א) $x^2 y'' - (2 + x)y = 0$

(ב) $x^2 y'' - (4 + x)y = 0$

בשני המקרים תנו את כל הפתרונות הניתנים בצורת טור פרוביניוס. תנו ביטוי מפורש למקדמים.

בהצלחה!