

משוואות דיפרנציאליות 88-240 מבחן מועד ב' סמסטר א' תשע"ד

משך המבחן: שתיים וחצי. ניתן להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר. ענו על 5 מ-6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. נתונה המשוואה $xy' - ay = bx^c$.

- (א) מצאו פתרון כללי למשוואה זו כאשר a, b, c קבועים כלשהם המקיימים $a \neq c$.
 (ב) מצאו פתרון כללי במקרה $c = a$.
 (ג) מצאו פתרון כללי (לכל a, b, c) למשוואה עם תנאי קושי $y(1) = \alpha$ עבור α כלשהו. הראו כי הפתרון במקרה $a = c$ מתקבל כגבול של הפתרון הכללי כאשר $a \rightarrow c$.

2. פתרו את המד"ר הבאות:

(א) $y'' + 2y' - 8y = 0$

(ב) $y'' + 4y' + 13y = 0$

(ג) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

(ד) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

3. פתרו $x^3y''' - 6xy' + 12y = 0$

4. עבור המערכת $y' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

- (א) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
 (ב) מצאו פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית ע"י וריאצית פרמטרים.

(ג) מצאו את הפתרון המקיים $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.

- (א) יהי $y = xe^x + e^x \cos 2x + 3x$. מצאו אופרטור דיפרנציאלי מסדר שני עם מקדמים קבועים, L , המקיים $Ly = 0$.
 (ב) אם y מקיים $y'' - 2y' + 5y = xe^x + e^x \cos 2x + 3x$, מצאו משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר שמיני עם מקדמים קבועים ש y פותר אותה.

(ג) מהו טרנספורם לפלס של הפתרון של המד"ר

$$y'' - 2y' + 5y = xe^x + e^x \cos 2x + 3x$$

המקיים $y(0) = 1, y'(0) = -1$ אין צורך לפתח את הפתרון לשברים חלקיים.

(ד) כתבו בשברים חלקיים את טרנספורם לפלס של הפתרון של המד"ר מסדר שמיני מסעיף ב'.

6. פתרו בשיטת טור חזקות את המד"ר $(x^2 - 1)y'' - xy' - 8y = 0$.
(תזכורת: משפט הבינום עבור חזקה לא שלמה n הוא $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)x^i}{i!\Gamma(n+1-i)}$)

בהצלחה!