

בחינה סופית במשוואות דיפרנציאליות רגילות – 88-240

מועד א' תשע"ה

מרצה: פרופ' גרמי שיף, ד"ר שמעון ברוקס
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: ניתן להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1.

(א) (7 נקודות) במצב "אידיאלי", תנועת גוף המושפע רק מכוח חיכוך מתוארת ע"י המשוואה

$$v' = -\mu v$$

כאשר $\mu > 0$ הוא פרמטר הנקרא "מקדם החיכוך". פתור משוואה זו עבור תנאי ההתחלה $v(0) = 1$.

(ב) (10 נקודות) משוואת חיכוך קצת יותר משוכללת היא

$$v' = -\mu v + bv^3$$

כאשר $b < \mu$ הוא קבוע נוסף של המערכת. פתור משוואה זו לאותו תנאי התחלה $v(0) = 1$.

(ג) (3 נקודות) לפי איזו מהמשוואות לעיל תהיה האטה מתונה יותר של התנועה? הסבר!

2. לכל אחד מהמשוואות הבאות, תנו תנאים הכרחיים ומספיקים על תנאי ההתחלה $y(0)$ ו- $y'(0)$, כך שהפתרון ישאף ל-1 (כלומר, כך שמתקיים $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$).

(א) (5 נקודות)

$$y'' + 5y' + 6y = 6$$

(ב) (5 נקודות)

$$y'' - 5y' + 6y = 6$$

(ג) (5 נקודות)

$$y'' + 5y' - 6y = -6$$

(ד) (5 נקודות)

$$y'' - 5y' - 6y = -6$$

.3

(א) (10 נקודות) פתור, על ידי שיטת וריאציית המקדמים, את המשוואה

$$y'' - \left(\frac{2}{x} + 1\right)y' + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)y = x^3$$

בהנתן ש- x ו- $x e^x$ הם פתרונות המשוואה ההומוגנית הקשורה.

(ב) (10 נקודות) פתור שוב את המשוואה, הפעם על ידי שיטת הורדת סדר, החל מהפתרון $y(x) = x$ של המשוואה ההומוגנית.

.4

(א) (10 נקודות) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$x' = -4x - 9y$$

$$y' = x + 2y$$

(ב) (5 נקודות) האם יש למערכת

$$x' = -4x - 9y + 5$$

$$y' = x + 2y$$

פתרון שבו גם $x(t)$ וגם $y(t)$ הם קבועים? אם כן, מהו הפתרון?

(ג) (5 נקודות) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$x' = -4x - 9y - t$$

$$y' = x + 2y$$

5. פתור, על ידי שיטת פרובניוס, את המשוואות

$$2xy'' - 3y' - y = 0$$

$$2xy'' - 2y' - y = 0$$

בכל מקרה, מצא את כל הפתרונות האפשריים **שהם טורי חזקות**, ומצא ביטויים מפורשים למקדמים של הטורים. אין צורך למצוא פתרונות שאינם טורי חזקות.

6.

(א) (7 נקודות) פתור את הבעיה

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(ב) (8 נקודות) העזר בשיטת וריאציית מקדמים להוכיח שהפתרון של הבעיה

$$y'' - 4y' + 4y = f(x) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

הוא

$$y(x) = \int_0^x (x-t)e^{2(x-t)} f(t) dt$$

(ג) (5 נקודות) אם $F(s), Y(s)$ הן התמרות הלפלס של הפונקציות $f(x), y(x)$ מהסעיף הקודם, הוכח ש-

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-2)^2}$$

(ד) (בנוסף) מהסעיפים הקודמים נובע ש- $\frac{F(s)}{(s-2)^2}$ היא התמרת הלפלס של

$$y(x) = \int_0^x (x-t)e^{2(x-t)} f(t) dt$$

איך ניתן להוכיח את זה באופן ישיר ?

בהצלחה רבה!