1. (א) שאלת מתנה - הפתרון הכללי של המשוואה הוא $v(x) = v(0)e^{-\mu x}$ והיות ונתון ש- $v(0) = 1$ הפתרון במקרה שלנו $v(x) = e^{-\mu x}$.

(ב) הפרדת משתנים:

$$\int \frac{dv}{v - \frac{b}{\mu}v^3} = -\mu \int dx$$

נכתוב $c = \frac{b}{\mu}$ שלפי ההנחה הוא קטן מ-1. נחשב את האנטגרל על ידי שברים חלקיים:

$$\begin{aligned} -\mu x &= \int \frac{dv}{v(1-cv^2} \\ &= \int \left(\frac{A}{v} + \frac{B+Cv}{1-cv^2}\right), \qquad A(1-cv^2) + v(B+Cv) = 1 \\ &= \int \left(\frac{1}{v} + \frac{cv}{1-cv^2}\right) dv \\ &= \log v - \frac{1}{2}\log(1-cv^2) + K \\ &= \log \frac{v}{\sqrt{1-cv^2}} + K \end{aligned}$$

כאשר K הוא קבוע. ולכן

$$\frac{v}{\sqrt{1-cv^2}} = Ae^{-\mu x}$$

(A קבוע אחר.) יש צורך לפתור את המשוואה הזאת למצוא את v:

$$v^2 = A^2e^{-2\mu x}(1-cv^2) \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{A^2e^{-2\mu x}}{1+cA^2e^{-2\mu x}} = \frac{1}{c+Be^{2\mu x}}$$

כאשר B הוא קבוע חדש. נתון ש- $v(0) = 1$ ולכן יש לקחת $c + B = 1$. ולכן הפתרון הסופי:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{\mu} + \left(1 - \frac{b}{\mu}\right)e^{2\mu x}}}$$

כאשר $b = 0$ חוזרים לפתרון מסעיף (א), $v = e^{-\mu x}$.

הערות:

1. השתמשנו כאן, בשקט, בנתון ש- $b < \mu$ להניח ש $1 - cv^2$ הוא חיובי וניתן לעשות שורש. נתון ש- $v(0) = 1$ ו- $b < \mu$ גורר ש- $c < 1$. ולכן $cv(0)^2 < 1$ ו- v רק יורד.

2. המשוואה היא גם מסוג משוואת ברנולי. אם נציב במשוואה המקורית $v = \frac{1}{z^{1/2}}$ נקבל

$$-\frac{z'}{2z^{3/2}} = -\frac{\mu}{z^{1/2}} + \frac{b}{z^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad z' = 2\mu z - 2b$$

זו משוואה ליניארית שניתן לפתור על ידי ההצבה $z = e^{2\mu x}y$.

(ג) ניתן לכתוב את הפתרון

$$v = \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{1 - \frac{b}{\mu}(1 - e^{-2\mu x})}}$$

אם $b > 0$ אזי המכנה הוא קטן מאחד, ו-v יהיה יותר גדול מהמקרה של $b = 0$. מאידך, אם $b < 0$ אזי המכנה הוא גדול מאחד, ו-v יהיה יותר קטן מהמקרה של $b = 0$. כלומר: $b > 0$ גורם להאטה מתונה יותר, $b < 0$ גורם להאטה מוגברת. וניתן לראות את זה גם מהמשוואה הדפרנציאלית:

$$v' = -\mu v + bv^3$$

אם $b > 0$ אזי $v' > -\mu v$ וההאטה (ירידה ב-v) איננה גדולה כל כך. אם $b < 0$ אזי $v' < -\mu v$, ירידה גדולה יותר.

2. (א) למשוואה $y''+5y'+6y=6$ יש פתרון פרטי 1. למשוואה ההומוגנית הקשורה יש מש' מאפיינת $\lambda^2+5\lambda+6=0$ עם שורשים $\lambda=-2,-3$. ולכן הפתרון הכללי של האי-הומוגנית הוא

$$y(t)=1+C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

כל הפתרונות שואפים ל-1 כאשר $t\to\infty$. אין צורך לדרוש שום תנאי על תנאיי ההתחלה $y(0),y'(0)$.

(ב) למשוואה $y''-5y'+6y=6$ יש פתרון פרטי 1. למשוואה ההומוגנית הקשורה יש מש' מאפיינת $\lambda^2-5\lambda+6=0$ עם שורשים $\lambda=2,3$. ולכן הפתרון הכללי של האי-הומוגנית הוא

$$y(t)=1+C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$$

הפתרון יתבדר אלא אם כן $C_1=C_2=0$ שזה נותן את הפתרון הקבוע $y(t)=1$. ולכן הפתרון היחיד ששואף ל-1 הוא הפתרון עם $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

(ג) למשוואה $y''+5y'-6y=6$ יש פתרון פרטי 1. למשוואה ההומוגנית הקשורה יש מש' מאפיינת $\lambda^2+5\lambda-6=0$ עם שורשים $\lambda=1,-6$. ולכן הפתרון הכללי של האי-הומוגנית הוא

$$y(t)=1+C_1e^{-6t}+C_2e^{t}$$

הפתרון יתבדר אם ורק אם $C_2\neq 0$. אחרת הפתרון ישאוף ל-1. כלומר, הפתרונות ששואפים ל-1 הם הפתרונות $y(t)=1+Ce^{-6t}$ שעבורם $y(0)=1+C$, $y'(0)=-6C$. התנאי הנדרש:

$$y(0)=1-\frac{y'(0)}{6}$$

(ד) למשוואה $y''-5y'-6y=6$ יש פתרון פרטי 1. למשוואה ההומוגנית הקשורה יש מש' מאפיינת $\lambda^2-5\lambda-6=0$ עם שורשים $\lambda=-1,6$. ולכן הפתרון הכללי של האי-הומוגנית הוא

$$y(t)=1+C_1e^{-t}+C_2e^{6t}$$

הפתרון יתבדר אם ורק אם $C_2\neq 0$. אחרת הפתרון ישאוף ל-1. כלומר, הפתרונות ששואפים ל-1 הם הפתרונות $y(t)=1+Ce^{-t}$ שעבורם $y(0)=1+C$, $y'(0)=-C$. התנאי הנדרש:

$$y(0)=1-y'(0)$$

3. (א) לפי עקרון וריאציית מקדמים הפתרון הוא

$$y(x)=C_1(x)x+C_2(x)xe^x$$

כאשר

$$\begin{aligned} xC_1'+xe^xC_2' &= 0\\ C_1'+(xe^x)'C_2' &= x^3 \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה $C_1'=-e^xC_2'$, מהמשוואה השנייה $xe^xC_2'=x^3$ ולכן

$$\begin{aligned} C_2 &= \int x^2e^{-x}\,dx=(-x^2-2x-2)e^{-x}+K_2\\ C_1 &= -\int x^2\,dx=-\frac{1}{3}x^3+K_1 \end{aligned}$$

ו-

$$y=\left(-\frac{1}{3}x^3+K_1\right)x+\left((-x^2-2x-2)e^{-x}+K_2\right)xe^x=\left(-\frac{1}{3}x^4-x^3-2x^2\right)+K_1x+K_2xe^x$$

(ב) על ידי הורדת סדר. נציב במשוואה $y = xz$:

$$(xz'' + 2z') - (\frac{2}{x} + 1)(xz' + z) + (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})xz = x^3 \quad \Rightarrow \quad xz'' - xz' = x^3$$

נכתוב $z' = w$ ונשאר לפתור $w' - w = x^2$. המשוואה ההומוגנית הקשורה היא $w' = w$ ולכן נציב כאן $w = e^x u$ לקבל

$$(e^x u' + e^x u) - e^x u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = x^2 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C_1$$

נשאר לחזור אחורה על כל ההצבות:

$$\begin{aligned} w &= -x^2 - 2x - 2 + C_1 e^x \\ z &= -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + C_1 e^x + C_2 \\ y &= -\frac{1}{3}x^4 - x^3 - 2x^2 + C_1 x e^x + C_2 x \end{aligned}$$

4. (א)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה: משוואה אופיינית

$$0 = (\lambda + 4)(\lambda - 2) + 9 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

ולכן ע"ע כפול $\lambda = -1$. בהתאם נחפש פתרון בצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב במשוואה ונצמצם גורם של e^{-t}:

$$\begin{aligned} & -\begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} B - A - Bt \\ D - C - Dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4A - 9C - (4B + 9D)t \\ A + 2C + (B + 2D)t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} B - A = -4A - 9C \\ -B = -4B - 9D \\ D - C = A + 2C \\ -D = B + 2D \end{cases} \end{aligned}$$

המשוואות 2 ו-4 נותנות $B = -3D$, המשוואות 1 ו-3 נותנות $A = D - 3C$. ולכן פתרון כללי

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D - 3C) - 3Dt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{-t} = C \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + D \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$$

יש הרבה דרכים לכתוב את הפתרון!

(ב) אם x, y הם קבועים

$$4x + 9y = 5 \;, \qquad x + 2y = 0$$

מהמשוואה השנייה $x = -2y$ ומהמשוואה הראשונה $y = 5$. ולכן הפתרון הוא $\underline{x = -10,\ y = 5}$.

(ג) נחפש פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית בצורה $x = a + bt$, $y = c + dt$. המשוואות הן

$$\begin{array}{l} b = -4(a+bt) - 9(c+dt) + t \\ d = (a+bt) + 2(c+dt) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 4a + 9c + b = 0 \\ 4b + 9d = 1 \\ d = a + 2c \\ b + 2d = 0 \end{array}$$

מהמשוואה האחרונה והשלישית $b = -2$, $d = 1$. מהמשוואה השנייה והרביעית $a = 5$, $c = -2$. הפתרון הפרטי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2t \\ t-2 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2t \\ t-2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + D \begin{pmatrix} 1-3t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$$

.5

$$\underline{2xy'' - 3y' - y = 0}$$

רואים ש- $x = 0$ היא נק' רגולרית סינגולרית ולכן מנסים לפתור על ידי שיטת פרובניוס. מחפשים פתרון בצורה

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}\,, \qquad c_0 \neq 0$$

נגזרות:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) c_n x^{n+\alpha-1}\,, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) c_n x^{n+\alpha-2}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} 2xy'' - 3y' - y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\alpha)(n+\alpha-1) c_n x^{n+\alpha-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+\alpha) c_n x^{n+\alpha-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} \\ &= x^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\alpha)(n+\alpha-1) c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+\alpha) c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \end{aligned}$$

בטור בסוגריים החזקה הנמוכה ביותר היא x^{-1} שמופיעה עם מקדם $2\alpha(\alpha-1)c_0 - 3\alpha c_0 = \alpha(2\alpha-5)c_0$. ולכן המשוואה המציינת היא $\alpha(2\alpha - 5) = 0$ עם שורשים $\alpha = 0, \frac{5}{2}$. היות וההפרש בין השורשים אינו שלם, אנחנו מצפים לשני פתרונות בלתי תלויים לינארית.

$\underline{\alpha = 0}$: המקדם של x^N, $N = 0, 1, 2, \ldots$, הוא

$$2(N+1)Nc_{N+1} - 3(N+1)c_{N+1} - c_N = (N+1)(2N-3)c_{N+1} - c_N$$

ולכן יש לדרוש

$$c_{N+1} = \frac{c_N}{2(N+1)\left(N - \frac{3}{2}\right)}\,, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

כלומר

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} \\ c_2 &= \frac{c_1}{2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{c_2}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} = \frac{c_0}{2^3\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{2^n n!\,\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

והפתרון:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!\,\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)}$$

(כפול קבוע חופשי)

$\underline{\alpha=\frac{5}{2}}$: המקדם של x^N, $N=0,1,2,\ldots$, הוא

$$2\left(N+\frac{7}{2}\right)\left(N+\frac{5}{2}\right)c_{N+1}-3\left(N+\frac{7}{2}\right)c_{N+1}-c_N=\left(N+\frac{7}{2}\right)(2N+2)c_{N+1}-c_N$$

ולכן יש לדרוש

$$c_{N+1}=\frac{c_N}{2(N+1)\left(N+\frac{7}{2}\right)}\,,\quad N=0,1,2,\ldots$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{2\cdot\frac{7}{2}} \\
c_2 &= \frac{c_1}{2\cdot 2\cdot\frac{9}{2}} = \frac{c_0}{2^2\cdot 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}} \\
c_3 &= \frac{c_2}{2\cdot 3\cdot\frac{11}{2}} = \frac{c_0}{2^3\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2^n n!\,\Gamma\left(\frac{2n+7}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

והפתרון:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+5/2}}{2^n n!\,\Gamma\left(\frac{2n+7}{2}\right)}$$

(כפול קבוע חופשי)

$$\underline{2xy''-2y'-y=0}$$

האנליזה דומה - הצבה במשוואה נותנת לנו את הדרישה

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\alpha)(n+\alpha-1)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\alpha)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$$

המשוואה המציינת היא $2\alpha(\alpha-1)-2\alpha=2\alpha(\alpha-2)=0$ עם שורשים שלמים $\alpha=0,2$. לפי התאוריה הכללית, יש פתרון בצורת פרובניוס כאשר $\alpha=2$ אבל לא בהכרח כאשר $\alpha=0$.

$\underline{\alpha=2}$: הרקורסיה:

$$2(N+3)(N+2)c_{N+1}-2(N+3)c_{N+1}-c_N=0\quad\Rightarrow\quad c_{N+1}=\frac{c_N}{2(N+3)(N+1)}\,,\quad N=0,1,2,\ldots$$

מזה מקבלים

$$c_n=\frac{c_0}{2^n n!(n+2)!}$$

ופתרון

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{2^n n!(n+2)!}$$

$\underline{\alpha=0}$: הרקורסיה:

$$2(N+1)Nc_{N+1}-2(N+1)c_{N+1}-c_N=0 \quad\Rightarrow\quad 2(N+1)(N-1)c_{N+1}=c_N\ , \quad N=0,1,2,\ldots$$

ברור שקיימת בעיה כאשר $N=1$: נצטרך לקחת $c_1=0$ ולכן $c_0=0$ בסתירה להנחה. ולכן לא קיים פתרון בצורת טור חזקות קשור ל- $\alpha=0$.

6. (א)

$$y''-4y'+4y=2e^{2x}\ , \quad y(0)=y'(0)=0$$

נעשה התמרת לפלס:

$$s^2Y-4sY+Y=\frac{2}{s-2} \quad\Rightarrow\quad Y=\frac{2}{(s-2)^3}$$

התמרת לפלס הופכית:

$$y(x)=x^2e^{2x}$$

(ב)

$$y''-4y'+4y=f(x)\ , \quad y(0)=y'(0)=0$$

המשוואה ההומוגנית הקשורה היא

$$y''-4y'+4y=0$$

עם משוואה מאפיינת $\lambda^2-4\lambda+4=0$ שיש לה שורש כפול $\lambda=2$. לכן שני פתרונות בת"ל של ההומוגנית הם e^{2x}, xe^{2x}. הכלל של וריאציית מקדמים קובע שהפתרון של האי-הומוגנית הוא

$$y(x)=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)xe^{2x}$$

כאשר C_1,C_2 מקיימים את המשוואות

$$\begin{aligned} C_1'e^{2x}+C_2'xe^{2x} &= 0\\ C_1'\left(e^{2x}\right)'+C_2'\left(xe^{2x}\right)' &= f(x)\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה $C_1'=-xC_2'$ ומהמשוואה השניה

$$(-xC_2')(2e^{2x})+C_2'(2x+1)e^{2x}=f(x) \quad\Rightarrow\quad C_2'=f(x)e^{-2x}$$

ולכן

$$C_2=K_2+\int_0^x f(t)e^{-2t}\,dt\ , \quad C_1=K_1-\int_0^x tf(t)e^{-2t}\,dt$$

כאשר K_1,K_2 הם קבועים, והפתרון הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(K_1-\int_0^x tf(t)e^{-2t}\,dt\right)e^{2x}+\left(K_2+\int_0^x f(t)e^{-2t}\,dt\right)xe^{2x}\\ &= (K_1+K_2x)e^{2x}+\int_0^x (x-t)e^{2(x-t)}f(t)\,dt\end{aligned}$$

נשאר לקבוע את הקובעים K_1,K_2. מהתנאי $y(0)=0$ מיד מקבלים $K_1=0$. הנגזרת של הפתרון היא

$$y'(x)=K_2(2x+1)e^{2x}+\int_0^x e^{2(x-t)}f(t)\,dt$$

ולכן מהתנאי $y'(0)=0$ מקבלים $K_2=0$. הפתרון הסופי הוא

$$y(x)=\int_0^x (x-t)e^{2(x-t)}f(t)\,dt$$

(ג) אם עושים התמרת לפלס של הבעייה

$$y'' - 4y' + 4y = f(x)\ , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

מקבלים

$$s^2Y - 4sY + Y = F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{(s-2)^2}$$

(ד) למצוא התמרת לפלס של

$$y(x) = \int_0^x (x-t)e^{2(x-t)} f(t)\, dt$$

ההתמרה היא

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_0^\infty y(x)e^{-sx}\, dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^x (x-t)e^{2(x-t)} f(t)\, dt\right)\, e^{-sx}\, dx \\
&= \iint_{0<t<x<\infty} (x-t)e^{2(x-t)-sx} f(t)\, dxdt
\end{aligned}$$

באנטגרל הכפול נעבור לקואורדינטות חדשות

$$\begin{cases} X = x - t \\ T = t \end{cases}$$

היעקוביאן שווה 1. ומקלבים

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \iint_{0<X,T<\infty} Xe^{2X-s(X+T)} f(t)\, dXdT \\
&= \left(\int_0^\infty f(T)e^{-sT}\, dT\right)\left(\int_0^\infty Xe^{-(s-2)X}\, dX\right) \\
&= \frac{F(s)}{(s-2)^2}
\end{aligned}$$

(לחשב את האנטגרל השני שים לב שהתמרת לפלס של x היא $\frac{1}{s^2}$.)