

בחינה סופית במשוואות דיפרנציאליות רגילות – 88-240

מועד ב' תשע"ה

מרחצת: פרופ' ג'רמי שיף, ד"ר שמעון ברוקס

משך הבחינה: 2.5 שעות

חומר עזר: ניתן להשתמש במחשב כיס ובכל חומר עזר

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. תגובה כימית מסדר שני. ישנם סוגי תגובות כימיות (הנקראות תגובות מסדר שני) המתוארות ע"י המשוואה

$$\frac{dA}{dt} = -kA^2$$

כאשר $0 < A < 1$ הוא הריכוז של החומר המגיב, והפרמטר $k > 0$ הוא קבוע (תלוי בחומר ובסביבה).

(א) (10 נקודות) פתרו את המשוואה עבור תנאי התחלה שרירותי $A(0)$. האם הפתרון רציף לכל $t > 0$?

(ב) (5 נקודות) חשב את הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$.

(ג) (5 נקודות) אילו הפרמטר k היה שלילי, האם היינו מקבלים פתרון רציף לכל $t > 0$? הסבר!

2.

(א) (5 נקודות) הוכח שלכל משוואה ליניארית הומוגנית מהצורה

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' - xa_0(x)y' + a_0(x)y = 0$$

(כלומר, שבה המקדם של y' הוא $-xa_0(x)$), $a_1(x) = -xa_0(x)$, קיים פתרון לא-טריוויאלי $y(x)$ שבו $y''(x) \equiv 0$ זהותית לכל x .

(ב) (15 נקודות) מצאו פתרון כללי למשוואה

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^3}$$

3. ידוע ש- $x(t) = \frac{1}{2}t \sin 2t$ הוא פתרון של משוואה מהצורה $mx'' + bx' + kx = 4 \cos 2t$ כאשר m, b, k הם קבועים.

- (א) (2 נקודות) מצא פתרון פרטי של המשוואה $mx'' + bx' + kx = 8 \cos 2t$.
 (ב) (2 נקודות) מצא פתרון פרטי של המשוואה $mx'' + bx' + kx = 4 \cos 2(t-1)$.
 (ג) (8 נקודות) מצא את m, b, k .
 (ד) (8 נקודות) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$mx'' + \left(b + \frac{48}{5}\right)x' + kx = 0$$

4. מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -8 & -a \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

במקרים הבאים (כל סעיף 5 נקודות):

(א) $a = 0$

(ב) $a = 4$

(ג) $a = 9$

(ד) $a = \frac{9}{2}$

5. העזר בשיטות טור חזקות או בכל שיטה אחרת לפתור את המשוואה

$$(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$$

.6

(א) (10 נקודות) פתור, על ידי התמרת לפלס, את הבעיה

$$y'' - 2y' + (1 - q^2)y = e^t \quad y(0) = y'(0) = 0$$

כאשר $q > 0$ הוא פרמטר חיובי.

(ב) (5 נקודות) האם לפתרון שמצאת בסעיף הקודם קיים גבול כאשר $q \rightarrow 0$? אם כן, מהו?

(ג) (5 נקודות) פתור באופן ישיר על ידי התמרת לפלס את הבעיה

$$y'' - 2y' + y = e^t \quad y(0) = y'(0) = 0$$

בהצלחה רבה!