

זמן המבחן: שעתיים.

אסור להשתמש בחומר עזר. מותר להשתמש במחשב כיס.
 יש לענות על 8 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
 יש לנמק היטב כל תשובה!

1. א. אם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלת 0 ושונות 1, חשב את $\rho(X, X+Y)$.
 ב. אם X, Y משתנים מקריים הקשורים על ידי $Y = 3X + 7$, חשב את $\rho(X, Y)$.

2. חשב את התוחלת ואת השונות של ההתפלגות הגאומטרית.

3. בקופסא 20 פתקים ממוספרים מ-1 עד 20. מוציאים 4 פתקים באופן מקרי (בלי החזרה). מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא לא יהיה גדול מ-15? מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא יהיה בדיוק 15?

4. למטבע מסוים ההסתברות לקבל "ראש" הוא $\frac{1}{3}$. מטילים את המטבע 900 פעמים. חשב בקירוב את $P(290 \leq X \leq 310)$, כאשר X הוא מספר הפעמים שיצא "ראש" ב-900 ההטלות.

5. משתנה מקרי בדיד מתפלג כדלהלן:

r	1	2	3	4
$P(X = r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

מצא את התוחלת ואת השונות של X .

6. נכון או לא נכון:

- א. אם A, B בלתי-תלויים אזי A^c, B^c בלתי-תלויים.
 ב. אם נתונים שלושה מאורעות A, B, C כך ש- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, ו- $P(C \cap A) = P(C)P(A)$, אזי $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
 ג. אם A, B שני מאורעות עם $P(A), P(B) > 0$, ו- $P(A|B) = P(A)$, אזי $P(B|A) = P(B)$.

נמק כל תשובה!

7. השווה בין הגרפים של שתי פונקציות הצפיפות

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 & 0 < x < 1 \\ f_2(x) &= 6x(1-x) & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

לפי דעתך, לאיזה משתי ההתפלגויות הקשורות תהיה שונות נמוכה יותר? חשב את השונויות בשתי ההתפלגויות.

8. בארץ מסויימת יש שתי מפלגות פוליטיות A, B ושני עתונים C, D . כל תושב תומך בדיוק מפלגה אחת, וקורא בדיוק עיתון אחד. מתוך סקר עולה שמכלל האכלוסיה 56% קוראים עיתון C , מתומכי מפלגה A 80% קוראים עיתון C , ומתומכי מפלגה B 30% קוראים עיתון C . לפי מספרים אלה, לאיזה מפלגה יש יותר תומכים?

9. הסבר, מבחינה קומבינטורית (במילים, בלי נוסחאות) למה

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

השתמש בעובדה זו להוכיח שאם $X \sim B(n, p)$ ו- $Y \sim B(1, p)$ בלתי-תלויים, אזי $X + Y \sim B(n + 1, p)$.

10. הוכח שלכל 3 מאורעות A, B, C

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).$$