

זמן המבחן: שעתיים.  
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.  
עליך לענות על 7 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.  
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. בקופסא  $n$  פתקים הממוספרים מ-1 עד  $n$ . מוציאים מהקופסא פתק אחר פתק, באופן אקראי, עם החזרה. יהי  $X$  מספר הפתקים שנבחרו מהקופסא במהלך הניסוי.  
א. אם מוציאים מהקופסא פתקים עד שהפתק שנבחר ראשון נבחר שוב, מהי התוחלת של  $X$ ?  
ב. אם מוציאים מהקופסא פתקים עד להוצאת כל אחד מהפתקים שעליהם מצויין "2", "3" או "4", מהי התוחלת של  $X$ ?
2. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad -\infty < x < \ln a$$

- א. מצא את ערכו של  $a$ .  
ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת (פונקציית ההצטברות) של  $X$ .  
ג. חשב את  $E[X]$ .
3. שלושה אנשים נכנסים למסעדה, ומתיישבים באופן מקרי ליד הבר אשר בו  $n$  מקומות ישיבה המסודרים בשורה.  
א. אם  $n = 5$ , מהי שונות מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם?  
ב. אם  $n$  כללי, מהי תוחלת מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם?
4. אודות בדיקה במכונת אמת ידוע כי כאשר אדם דובר אמת המכונה מראה כי שיקר בהסתברות 0.1, וכאשר אדם משקר המכונה מראה זאת בהסתברות 0.7.  
אדם נאשם בגניבה. לפי הערכת חוקרי המשטרה, טרם בדיקה במכונת אמת, ההסתברות שגנב היא 0.8. הנאשם, המכחיש כי גנב, נמצא כדובר שקר בבדיקה במכונת אמת. מהי ההסתברות שאכן גנב?

- ב-45% מהמשפחות יש בת בכורה  
 ב-10% מהמשפחות יש שלוש בנות  
 ב-25% מהמשפחות יש שתי בנות שאחת מהן היא הבכורה  
 ב-75% מהמשפחות יש לפחות בת אחת מבין הילדים השני והשלישי  
 ב-13% מהמשפחות הילד הבכור הוא בן והשאר בנות  
 משפחה נבחרת באופן מקרי. מהי שונות מספר הבנות? מהי שונות מספר הבנים?

6. באוניברסיטה מסויימת יש 1000 מחשבים, והסיכוי שיהיו בעיות טכניות במחשב מסויים ביום מסויים הוא  $\frac{1}{500}$ . האחראי על תחזוקת המחשבים רוצה להעסיק מספר טכנאים כך שבלפחות 90% של הימים לא יהיה צורך לטכנאי אחד לטפל ביותר ממחשב אחד. כמה טכנאים אתה מציע לו להעסיק? יש להניח שמחשב אחד אינו משפיע על השני.

7. ארבעה אנשים  $A, B, C, D$  שמים בארגז אחד את הכובעים שלהם.  $A$  בוחר כובע אחד באקראי מהארגז, ואח"כ  $B$  בוחר כובע אחד (בלי ש- $A$  יחזיר את הכובע שהוא בחר).  
 א. מהי ההסתברות ש- $A$  יבחר את הכובע שלו?  
 ב. אם  $A$  בחר את הכובע שלו, מהי ההסתברות ש- $B$  גם יבחר את שלו?  
 ג. אם  $A$  לא בחר את הכובע שלו, מהי ההסתברות ש- $B$  כן יבחר את שלו?  
 ד. מהי ההסתברות ש- $B$  יבחר את הכובע שלו?

8. משך שלוש שנים באוניברסיטה, סטודנט מסויים לומד 30 קורסים, והציונים שלו בכל קורס הם משתנים מקריים בלתי תלויים, עם התפלגות זהה, בעלת תוחלת 82 ושונות 13. מהן התוחלת והשונות של הממוצע שלו? מהי ההסתברות שהממוצע שלו יהיה מעל 85?

9. ההתפלגות המשותפת של זוג משתנים מקריים  $(X, Y)$  ניתנה על ידי הטבלה:

		$X$		
		-1	0	1
	-1	0	$\alpha$	$\beta$
$Y$	0	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$
	1	$\beta$	$\alpha$	0

כאשר  $\alpha, \beta, \gamma$  הם מספרים חיוביים עם  $4\alpha + 2\beta + \gamma = 1$ .

- א. מצא את התפלגותם של המשתנים המקריים  $|X+Y|$  ו- $|XY|$ .  
 ב. מהו התנאי שתהיינה למשתנים אלו התפלגויות זהות?  
 ג. מהי ההסתברות ש- $|X+Y| = |XY|$ ?

10. יהי  $X$  משתנה מקרי עם התפלגות פאוסון עם פרמטר  $\lambda = 3$ .

- א. מהי ההסתברות ש- $X$  מקבל אחד מהערכים 2, 3 או 4?  
 ב. אם ידוע ש- $X$  מקבל אחד מהערכים 2, 3 או 4, מהן ההסתברויות ש- $X = 2$ , ש- $X = 3$ , וש- $X = 4$ ?  
 ג. אם ידוע ש- $X$  מקבל אחד מהערכים 2, 3 או 4, מהי התוחלת של  $X$ ?

בהצלחה!!