

זמן המבחן: שעתיים.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
 יש לנמק היטב כל תשובה!

1. בכד א': 4 כדורים, שלושה לבנים ואחד שחור.
 בכד ב': 4 כדורים, שלושה שחורים ואחד לבן.
 בוחרים כד אקראי ומוציאים ממנו כדור אחד. אם הוא לבן מוציאים מאותו כד כדור נוסף (ללא החזרת הכדור הראשון). אם הכדור הראשון הוא שחור, אזי עוברים לכד השני ומוציאים ממנו כדור אחד. אם בסופו של דבר שני הכדורים שבידינו הם מאותו צבע, מהי ההסתברות שהכד שבחרנו בהתחלה היה כד א' ?

2. בכד N כדורים, $N - 1$ שחורים ו-1 לבן. ברצוני להוציא את הכדור הלבן, ולשם כך אני יכול לבחור באחת משתי שיטות:
 שיטה א': אני רשאי להוציא כדור אחר כדור באופן אקראי וללא החזרה, כאשר מחיר כל הוצאה הוא 13 ש"ח.
 שיטה ב': אני רשאי להוציא כדור אחר כדור באופן אקראי ועם החזרה, כאשר מחיר כל הוצאה הוא 8 ש"ח.
 איזו משתי השיטות עדיפה?

3. פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X היא

$$f(x) = \frac{2k}{(1+kx)^3} \quad x > 0$$

כאשר k הוא קבוע חיובי. מצא את התוחלת ואת פונקציית ההצטברות (פונקציית ההתפלגות המצטברת) של X . מה היא $P(0 < X < \frac{1}{k})$? מצא את a כך ש- $P(0 < X < a) = \frac{1}{2}$.

4. ברשת מחשבים A , הסיסמאות האישיות לחיבור לרשת מורכבות מ-7 ספרות ערביות (0-9). ברשת B , הסיסמאות מורכבות מ-5 אותיות לטיניות (a-z, 26 אפשרויות). בשתי הרשתות, כל ספרה או אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת בסיסמא, וסדר הספרות או האותיות חשוב.

א. לאיזה רשת יש יותר סיכוי להתחבר עבור משתמש אשר שכח את סיסמתו ומנסה לנחש?
ב. לאיזה רשת יש יותר סיכוי להתחבר עבור משתמש אשר זוכר את הספרות או את האותיות המרכיבות את סיסמתו, אבל שכח את סדרן?

אם ברשת מחשבים יש N סיסמאות אפשריות, ו- r משתמשים בוחרים סיסמא (כל אחד לעצמו) באופן אקראי, מהי ההסתברות שלא יהיו שני משתמשים אשר יבחרו את אותה סיסמא?

5. לחברה מסויימת יש, בתחילת שנה מסויימת, 10,000 לקוחות. ההסתברות שלקוח בתחילת השנה יהיה עדיין לקוח בסוף השנה היא 90%. בנוסף, משערים שיקבלו 15,000 פניות חדשות במשך השנה, אשר ב-10% מהמקרים יביאו לקוח חדש. מצא את התוחלת ואת השונות של המספר הכולל של לקוחות בסוף השנה, בהנחה שאין תלות בין מספר הלקוחות הוותיקים הנשארים ומספר הלקוחות החדשים.

בהנחה שמספר הלקוחות בסוף השנה מתפלג נורמלית (עם התוחלת והשונות אשר מצאת), מצא את ההסתברות שמספר הלקוחות בסוף השנה יהיה לפחות 10,450.

בהצלחה!!