בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ג

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. הסבר, בקצרה, מהוא הפירוק לערכים סינגולריים של מטריצה. איך מזהים את הדרגה של מטריצה מתוך פירוק זה? באיזה פקודה משתמשים לחישוב פירוק זה ב-Matlab?

אם A מגודל $m \times n$, $A = UDV^H$ כאשר U, V אוניטריים ($UU^H = VV^H = I$), U מגודל $m \times m$ ו-V מגודל $n \times n$, ו-D מטריצה מגודל $m \times n$ שכולו אפסים חוץ מבאלכסון הראשי (כלומר $D_{ij} = 0$, $i \neq j$). באלכסון הראשי של D יש רכיבים ממשיים חיוביים, שמופיעים בסדר יורד. הדרגה של A היא מספר הערכים שאינם אפס באלכסון הראשי של D. מוצאים את הפירוק ב- Matlab על ידי הפקודה

$$[\mathtt{U\ D\ V}] = \mathtt{svd(A)}$$

---

2. הפונקציה $f(x) = \cos(\sin(4x(1-x))) + \frac{1}{4}x$ היא חד-מודלית בקטע $[0.1, 0.9]$. העזר בשלושה סיבובים של חיפוש יחס הזהב למצוא קטע יותר מצומצם שבו נמצא המינימום.

תמיד מחלקים את הקטע ביחס $\alpha : 1 - 2\alpha : \alpha$ כאשר $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.3820$. סיבוב ראשון:

$$f(0.1) \approx 0.964 \qquad f(0.40557) \approx 0.782 \qquad f(0.59443) \approx 0.830 \qquad f(0.9) \approx 1.16$$

זורקים את הקטע האחרון. סיבוב שני: מוסיפים את הנקודה

$$f(0.28886) \approx 0.816$$

וזורקים את הקטע הראשון (בין 0.1 ל- 0.28886) מוסיפים את הנקודה

$$f(0.47771) \approx 0.787$$

ושוב אפשר לזרוק את הקטע האחרון, בין 0.47771 ובין 0.59443. נשאר שהמינימום נמצא בקטע $[0.28886, 0.47771]$.

---

3. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לנתונים הבאים:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.2	2.7	3.9	5.3	6.3
w_i	0.5	1	1	1	0.5

(w_i הוא המשקל שיש ליחס לנקודה (x_i, y_i).)

צריכים לפתור את המערכת a, b

$$\begin{pmatrix} \Sigma w_i x_i^2 & \Sigma w_i x_i \\ \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma w_i x_i y_i \\ \Sigma w_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 15.65 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 15.65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.28 \\ 1.35 \end{pmatrix}$$

---

4. מצא, דרך שיטת ניוטון, את הפולינום מדרגה 3 או פחות שהוא עובר דרך הנקודות

x_i	0	1	2	4
y_i	0	3	3	2

יש לכתוב את התשובה הסופית בצורה הסטנדרטית $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

טבלת הפרשים מחולקים:

x_i	y_i			
0	0			
1	3	3		
2	3	0	$-\frac{3}{2}$	
4	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

ולכן הפולינום הוא

$$3x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{31}{6}x$$

---

5. כאשר משתמשים בכלל הטרפז למצוא את האינטגרל $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, כאשר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר צעדים	קריוב
10	2.0560847540709
20	2.0552781149770
40	2.0550764783692
80	2.0550260706642

העזר בשיטת רומברג למצוא הקירוב הכי טוב לאנטגרל שאפשר.

טבלת רומברג:

10	10847540709			
20	2781149770	92352790		
40	0764783692	92661666	92682258	
80	0260706642	92680959	92682245	92682245

התשובה הטובה ביותר: 2.550092682245 .

---

6. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y' = y^2 + t\ , \qquad y(0) = 0$$

איזה פקודות היית כותב ב-Matlab כדי למצוא קירוב ל-$y(1)$. (יש רק להסביר את השיטה ode23.)

התשובה עבור Matlab 5 מכינים קובץ אחד foo.m הכולל את הפקודות

```
function z=foo(y,t)
    z=y^2 + t
```

ואח"כ כותבים

```
[y t] = ode23('f',[0 1],[0])
```

חלק ב'

1. לפי התאוריה, עבור x קטן

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \approx 0.5$$

כאשר מנסים לבדוק את זה ב- Matlab, על ידי שכותבים

```
x = [1e-9 1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3 1e-2 1e-1]
(1-cos(x))./x.^2
```

מקבלים את התוצאה

0	0	0.499600361	0.500044450	0.500000041
0.499999997	0.499999958	0.499995833	0.499583472	

(התוצאות נכתבו ל-10 ספרות דיוק). למה השגיאות עולות עבור ה-x'ים היותר גדולים והיותר קטנים? למה מקבלים 0 עבור x קטן מדי? הסבר את התוצאות.

תזכורת: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots$.

עבור x מאוד קטן המחשב חושב ש- $\cos x = 1$ ולכן התשובה לחישוב יוצא 0. זה קורה כאשר $\frac{1}{2}x^2 \leq \epsilon_{\text{machine}}$, היות ו- $\epsilon_{\text{machine}} \approx 10^{-16}$, רואים תופעה זו כאשר $x = 10^{-8}$ אבל לא כאשר $x = 10^{-7}$.

כאשר x קצת יותר גדול, יש שני מקורות של שגיאה. יש שגיאת עיגול של עד ϵ/x^2 (השגיאה המוחלטת ב- $\cos x$ הוא מסדר גודל ϵ, ולכן זה גם סדר גודל השגיאה המוחלטת ב- $1-\cos x$. כאשר מחלקים את $1 - \cos x$ על ידי x^2 גם מחלקים את השגיאה המוחלטת בו.) יש גם שגיאה אלגוריתמית של $x^4/24$, בגלל ש-

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-[1-x^2/2+x^4/24-\ldots]}{x^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{x^4}{24}$$

רואים שכל ש- x יותר גדול יש יותר שגיאה אלגוריתמית, וכל ש- x יותר קטן יש יותר שגיאת עיגול. לגבי גודל השגיאות: כאשר $x = 10^{-1}$ רואים שיש שגיאה של 0.000417 שזה

$\frac{1}{2400}$ ל-3 ספרות דיוק. השגיאה האלגוריתמית היא דומיננטית עבור $x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. לערכים הקטנים יותר של x שגיאת העיגול היא דומיננטית, אבל התוצאות מותאמות לחסם ϵ/x^2 שהסברנו: לדוגמה כאשר $x = 10^{-5}$ יש שגיאה של בערך 5×10^{-6} שזה קטן מ-$\epsilon/x^2 \approx 10^{-16}/(10^{-6})^2 = 10^{-4}$.

---

2. (א) מהו פירוק LU של מטריצה? איך ניתן להשתמש בפירוק LU של המטריצה הריבועית A לפתור את המשוואה $Ax = b$?

(ב) האם המטריצות

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נותנות פירוק LU של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(ג) העזר במטריצות L ו-U מסעיף (ב) למצוא את הפתרון הכללי למשוואה

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(רמז: הוסיפו עוד שורה למשוואה!)

(א) פירוק LU של מטריצה A: שלוש מטריצות P, L, U, L מטריצה משולשת תחתון עם 1'ים באלכסון הראשי, U מטריצה משולשת עליון, P מטריצת תמורה, כך ש- $PA = LU$.

אם $Ax = b$ ו- $PA = LU$ הוא פירוק LU של A, אזי $LUx = Pb$. מגדירים $y = Ux$. מוצאים את y מהמשוואה $Ly = Pb$ (קל לפתור בגלל ש-L משולשת תחתון), ואח"כ מוצאים את x מהמשוואה $Ux = y$ (קל לפתור בגלל ש-U משולשת תחתון).

(ב) אם מכפילים את המטריצות הנתונות מוצאים ש-

$$LU = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$LU = PA \ , \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

זה נותן פירוק LU של A (היות והמטריצה P היא מטריצת תמורה).

(ג) נשלים את המשוואה כך שבצד שמאל מופיעה המטריצה A.

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$$

(כאן s לא ידוע לנו.) נכפיל על ידי P מסעיף (ב):

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ונשתמש בפירוק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

עכשיו משתמשים בשיטה שהוסברה בסעיף (א) לפתור. נכתוב

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

ואז

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מזה מקבלים ש-

$$y_1 = s \ , \qquad y_2 = 1 + 2s \ , \qquad y_3 = -1 - 7s$$

מציבים חזרה בהגדרה של y:

$$\begin{pmatrix} s \\ 1+2s \\ -1-7s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ופותרים לקבל

$$x_3 = -1 - 7s \ , \qquad x_2 = \frac{4}{3} + \frac{23}{3}s \ , \qquad x_1 = \frac{1}{4} + 2s$$

כלומר

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 23 \\ -21 \end{pmatrix}$$

---

3. (א) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x) = 0$ כאשר $f(x) = \ln x - 1$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x = e$ אם מתחילים מ-x_0 כאשר $x_0 > e^2$? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0 = 7$.

(ב) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x) = 0$ כאשר $f(x) = (\ln x - 1)^2$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x = e$ אם מתחילים מ-x_0 כאשר $x_0 > e^3$? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0 = 7$.

(ג) בתוצאות של סעיפים (א) ו-(ב), איזה משתי הרקורסית מגיעה יותר קרוב לשורש אחרי 3 סיבובים (החל מ- $x_0 = 7$)? ואיזה אחרי 6 סיבובים?

(ד) הסבר: שיטת ניוטון למשוואה $(f(x))^2 = 0$ אולי תצליח להגיע קרוב לשורש יותר מהר משיטת ניוטון למשוואה $f(x) = 0$, אבל בסוף שיטת ניוטון למשוואה $f(x) = 0$ תמיד תגיע יותר מהר לדיוק גבוה.

(א) רקורסית ניוטון היא

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln x_n - 1}{\frac{1}{x_n}} = x_n\,(2 - \ln x_n)$$

אם מתחילים מ- $x_0 > e^2$ מקבלים $x_1 < 0$ ואי אפשר להמשיך את הרקורסיה. אם מתחילים מ- $x_0 = 7$ מקבלים

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.3786 \\ x_2 &= 1.1250 \\ x_3 &= 2.1175 \\ x_4 &= 2.6464 \\ x_5 &= 2.7173 \\ x_6 &= 2.7183 \end{aligned}$$

(ב) רקורסית ניוטון היא

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(\ln x_n - 1)}{\frac{2}{x_n}} = \frac{x_n}{2}\,(3 - \ln x_n)$$

אם מתחילים מ- $x_0 > e^3$ מקבלים $x_1 < 0$ ואי אפשר להמשיך את הרקורסיה. אם מתחילים מ- $x_0 = 7$ מקבלים

$$\begin{aligned} x_1 &= 3.6893 \\ x_2 &= 3.1259 \\ x_3 &= 2.9075 \\ x_4 &= 2.8097 \\ x_5 &= 2.7632 \\ x_6 &= 2.7406 \end{aligned}$$

(ג) אחרי 3 סיבובים הרקורסיה השנייה היא היותר קרובה. אחרי 6, הראשונה מוצלחת יותר.

(ד) כאשר שיטת ניוטון מתכנסת לשורש פשוט של משוואה. היא מתכנסת בצורה ריבועית. לשורש כפול זה לא כך. לכן ההתכנסות של הרקורסיה עבור המשוואה $f(x) = 0$ היא באופן כללי יותר מהר מזה של המשוואה $f(x)^2 = 0$. אבל מה שאמרנו עכשיו הוא רק נכון כאשר מתקרבים לשורש. בסיבובים הראשונים כל אחד מהרקורסיות יכולה להיות יותר מוצלחת.

---

4. רוצים לעשות קירוב לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

על ידי פולינומים מדרגה 3.

(א) מצא קירוב כזה על ידי השיטה הסטנדרטית של ריבועים מזעריים (כלומר: מצא פולינום $p(x)$ מדרגה 3 או פחות כך ש-

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-p(x))^2dx$$

הוא מינימלי). רמז: שים לב ש-$f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית!

(ב) צייר גרף של הפונקציה $f(x)$ עם הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף (א). כמה פעמים הם חותכים זה את זה בקטע $[-1,1]$? [הערה: אם לא הצלחת לקבל תשובה סופית בסעיף (א), או יש סיבה לחשוש שהתשובה שקבלת איננה נכונה, ניתן לעבוד בסעיף הזה "כאילו" התשובה מסעיף (א) היא $p(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{32}x$, גם כי זה לא התשובה הנכונה!]

(ג) אם רוצים קירוב פולינומי לפונקציה $f(x)$ דווקא בצורה

$$q(x)=ax+(1-a)x^3$$

(ככה מקבלים ש-$q(\pm 1)=\pm 1=f(\pm 1)$), איך היית בוחר את הפרמטר a ? ניתן או להציע שיטה אחת לבחור את a וגם למצוא את הערך של a לפי שיטה זו, או להציע שתי שיטות שונות לבחור את a.

(א) יש לנו

$$p(x)=a_0+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)+a_3P_3(x)$$

כאשר ה- $P_i(x)$ הם פולינומי לג'נדר ו-

$$a_i=\frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_i(x)dx$$

במקרה שלנו $a_0=a_2=0$ על ידי הזוגיות של $f(x)$ ו-

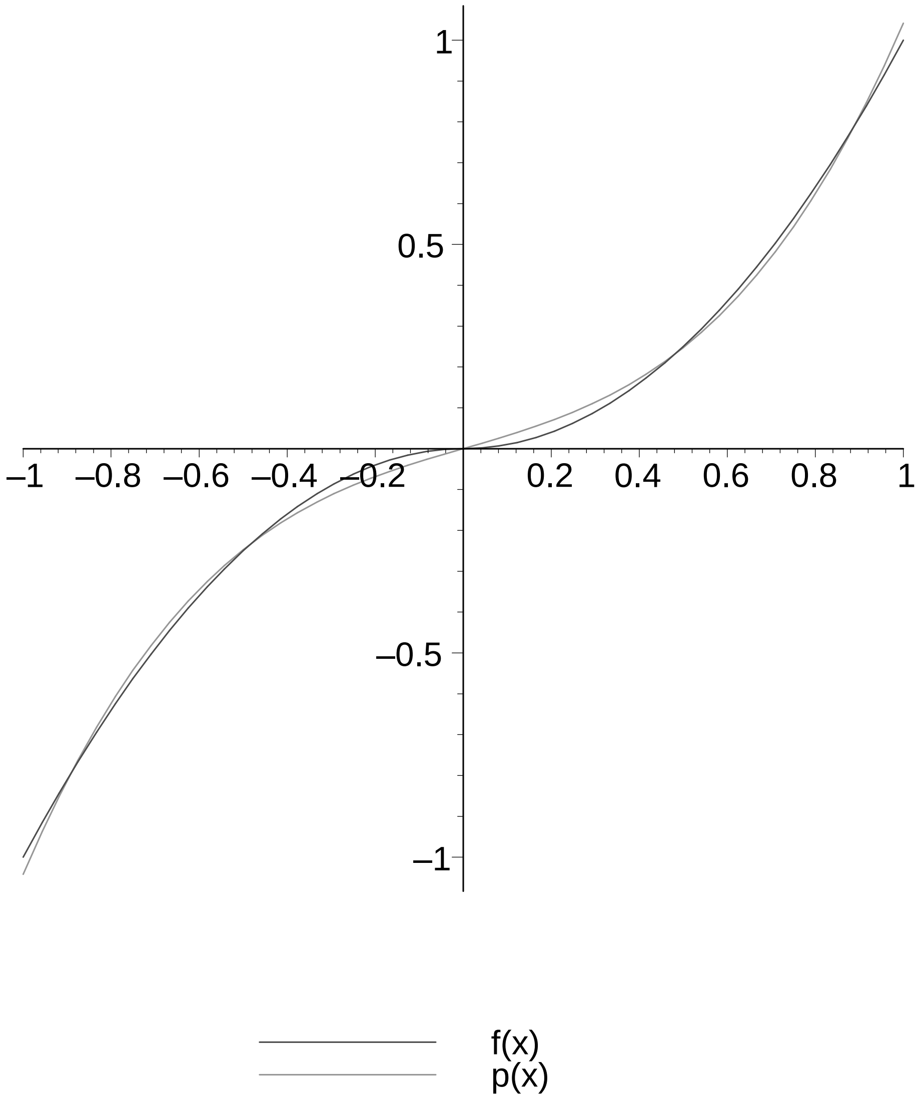
$$a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3\int_{0}^{1}x^3dx=\frac{3}{4}$$

$$a_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)f(x)dx=7\int_{-1}^{1}\frac{5}{2}x^5-\frac{3}{2}x^3dx=\frac{7}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{24}$$

ולכן

$$p(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{24}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)=\frac{35}{48}x^3+\frac{5}{16}x$$

(ב) הגרפים מאוד דומים! הם חותכים זה את זה ב-5 מקומות



(ג) אופציה אחת לבחור את a היא לדרוש ש- $q(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ (היות ו- $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$). זה נותן $a = \frac{1}{3}$.
עוד דרך היא לדרוש ש-

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - ax - (1-a)x^3)^2 dx$$

יהיה מינימלי. דורשים $dS/da = 0$ ומקבלים

$$S = \int_{-1}^{1} (x^3 - x)(f(x) - x^3 + a(x^3 - x))dx = 0$$

כלומר

$$a = \frac{\int_{-1}^{1}(x^3 - x)(x^3 - f(x))dx}{\int_{-1}^{1}(x^3 - x)^2 dx} = \frac{\int_{0}^{1}(x^3 - x)(x^3 - x^2)dx}{\int_{0}^{1}(x^3 - x)^2 dx} = \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}} = \frac{11}{32}$$

שתי תשובות קרובות!