בס"ד

<u>כלים לאנליזה נומרית 88-276</u>

<u>תרגילים 1</u>

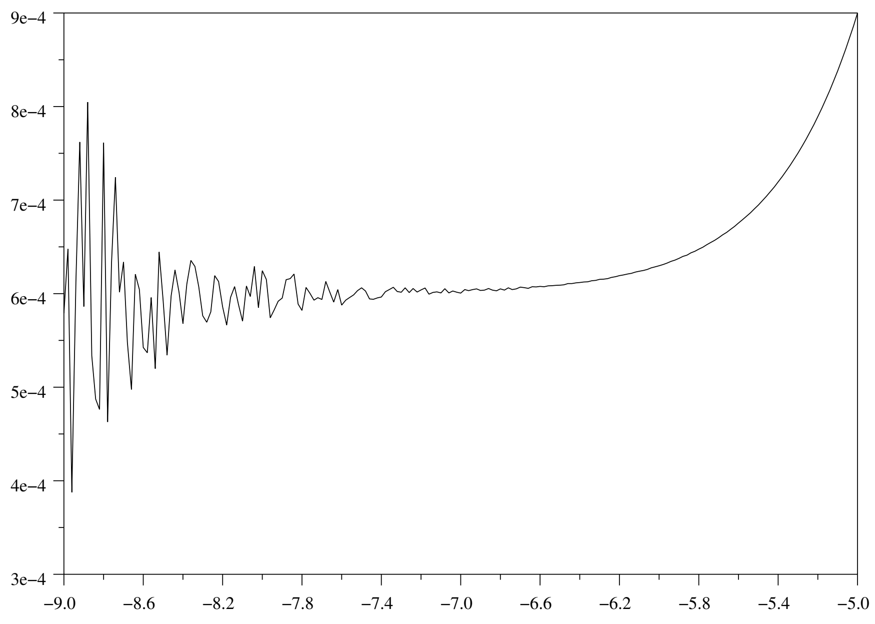
1. בחישוב של הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x) = x^3$ כאשר $x = 10$ עושים 3 טעויות:
   (א) במקום $x = 10$ משתמשים ב-$x = 10.00001$.
   (ב) משתמשים בקירוב לנגזרת
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
   כאשר h הוא מספר חיובי קטן.
   (ג) עושים את כל החישובים על מחשב העובד לפי התקן הסטנדרטי (double precision).

מצא אומדנים לשגיאות הנומריות הנובעות מכל אחד מ-3 הטעויות האלה.

כאשר מודדים את השגיאה הכוללת בחישוב, אל ידי שכותבים את הפקודות הבאות ב-Matlab:

```
x=10.00001;
h=10.^[-9:0.02:-5];
f=((h+x).^3-x^3)./h;
err=abs(f-300);
plot(log10(h),err)
```

מקבלים את הגרף הבא:



הסבר!

2. לפי התאוריה, השורש הקטן של המשוואה הריבועית

$$ax^2 - 200x + 0.001 = 0$$

שואף ל-0.5×10^{-5} כאשר הפרמטר החיובי a שואף ל-0. אבל כאשר מנסים לבדוק את זה ב-Matlab, על ידי שכותבים

```
a = [1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3]
b =(200-sqrt(200^2-4*0.001*a))./(2*a)
```

מקבלים את התוצאה

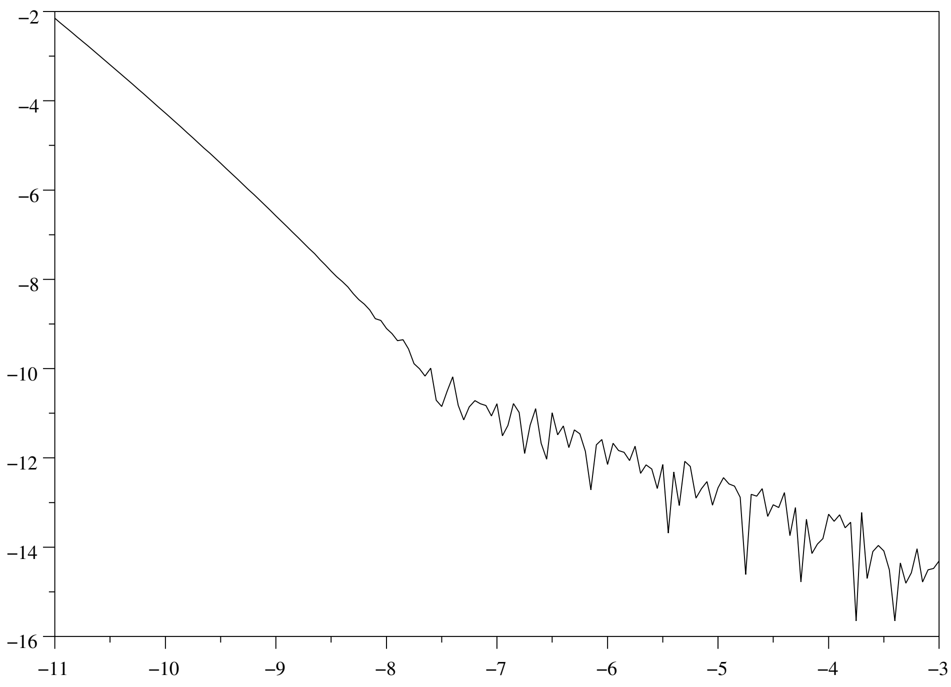
```
b = 1.0e-05 * [0.4263 0.4974 0.5002 0.5001 0.5000 0.5000]
```

למה יש טעויות גבוהות לערכים נמוכים של a? הסבר למה תיתכן שגיאה יחסית מסדר גודל 10^{-4} כאשר $a = 10^{-5}$.

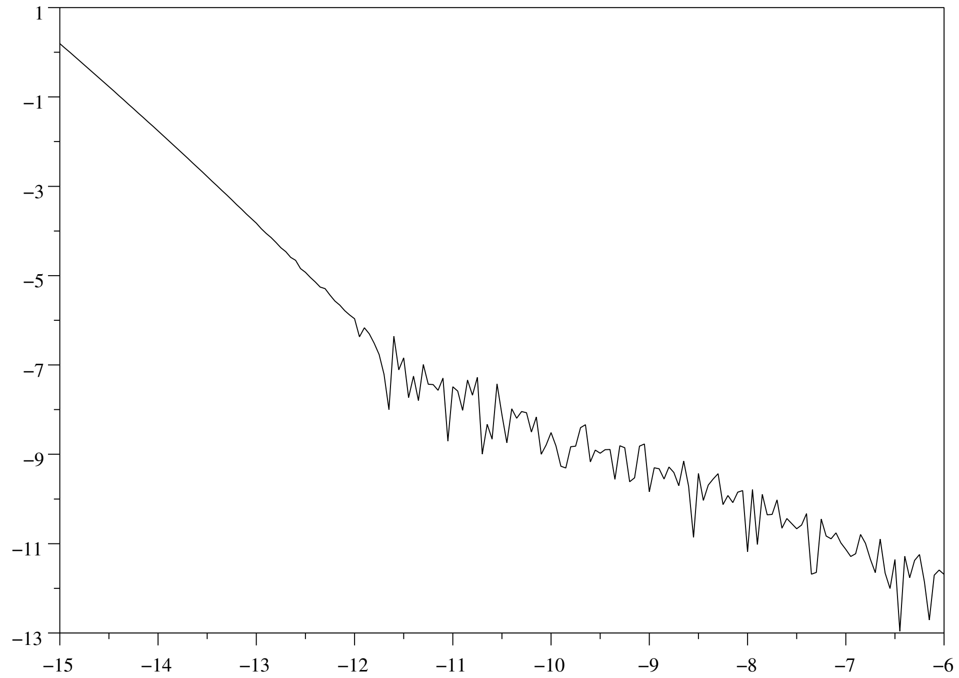
3. כאשר משתמשים בקירוב

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

לחשב e^x (כאן N שלם חיובי גדול) מקבלים שגיאות יחסיות כדלהלן:
כאשר $N = 40$:



כאשר $N=50$:



הגדפים מראים את ה-log (בבסיס 10) של השגיאה היחסית כפונקציה של x.

הסבר את צורת הגרפים. ל-N כללי, איפה יהיה המעבר בין שגיאת עיגול ושגיאה אלגור-יתמית? בדוק את ההשערה שלך במחשב!

4. (מומלץ להעזר ב-Maple!)

(א) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-2h), f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן ?

(ב) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן ?

(ג) איך ניתן למצוא קירובים ל-$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$ אם יודעים את הערכים של $f(x-h), f(x-\sigma h), f(x), f(x+\tau h), f(x+h)$, כאשר h הוא מספר חיובי קטן, ו-σ, τ הם שני מספרים בין 0 ל-1 ?