בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276

תרגילים 2

הערה: מייצרים מטריצה רנדומית מגודל $n \times m$ ב-Matlab על ידי הפקודה `rand(n,m)`. הרכיבים של המטריצה שנוצרה כך הם מספרים רנדומים בלתי תלויים בין 0 ו-1.

1. (א) אם `A` היא מטריצה $m \times n$ כאשר $m > n$ ו-`b` הוא ווקטור ממימד m, מה מקבלים כאשר כותבים את הפקודה `A\b` ב-Matlab?

(ב) אם `x` הוא הווקטור שמקבלים מהפקודה `A\b` בסעיף (א), ו-`v` הוא ווקטור אחר בעל מימד n, איך מתנהגת הפונקציה

$$f(\epsilon) = ||A(x + \epsilon v) - b||_2$$

כפונקציה של ϵ?

(ג) בדוק את התשובה שלך מסעיף (ב) על ידי בחירת `A` מטריצה רנדומית 10×5, `b` ווקטור רנדומי ממימד 10, `v` ווקטור רנדומי ממימד 5. צייר גרף של הפונקציה $f(\epsilon)$ עבור ערכים של ϵ בין -2 ל-2. יש לפרט את כל הפקודות ב-Matlab שנעזרת בהם.

2. נתונות n נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_x)$ במישור, ורוצים למצוא קו ישר $y = mx + c$ שבא קרוב לנקודות, במובן ש

$$\begin{aligned} mx_1 + c &\approx y_1 \\ mx_2 + c &\approx y_2 \\ &\vdots \\ mx_n + c &\approx y_n \end{aligned} \quad .$$

כתוב פונקציה (קובץ M) ב-Matlab אשר, בהנתן הנקודות (x_i, y_i), "פותרת" את המערכת הליניארית הזאת למצוא m, c (במובן של ריבועיים מזעריים). בנוסף לחישוב m, c, הוסף לפונקציה יכולת לחשב את "שורש ממוצע הריבועים של השגיאות"

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - c)^2} \quad .$$

איך היית מכליל את הפונקציה שלך למצוא פרבולה $y = qx^2 + mx + c$ שהיא קירוב לנקודות, במובן ש-

$$\begin{aligned} qx_1^2 + mx_1 + c &\approx y_1 \\ qx_2^2 + mx_2 + c &\approx y_2 \\ &\vdots \\ qx_n^2 + mx_n + c &\approx y_n \end{aligned} \quad ?$$

מומלץ לחשוב על השפעה שתהיה על התוצאות של הפונקציות שלך כאשר עושים הזזות בנתונים (כלומר $(x_i, y_i) \to (x_i + a, y_i + b)$ לכל i).

3. (א) אם A היא מטריצה $m \times n$ כאשר $m > n$ ו-b הוא ווקטור ממימד m, ומוצאים את שני הווקטורים $\mathtt{x, y}$ ב-Matlab על ידי הפקודות $\mathtt{x = A\backslash b}$, $\mathtt{y = pinv(A) * b}$, איך ייתכן ש-$\mathtt{x, y}$ יהיו שונים אבל בכל זאת גם $\mathtt{Ax - b}$ וגם $\mathtt{Ay - b}$ שווים ל-0 (עד לדיוק המחשב)?

(ב) אם $\mathtt{A, b, x, y}$ הם כמו בסעיף (א), ו-v הוא ווקטור ב-$\mathrm{Ker}(\mathtt{A})$ (שניתן למצוא, לדוגמה, על ידי שכותבים $\mathtt{[U\ D\ V] = svd(A)}$, ואח"כ $\mathtt{v} = \mathtt{V}(:, i)$ כאשר i הוא שלם גדול מ-m אבל לא גדול מ-n), איך מתנהגת הפונקציה

$$f(\epsilon) = ||y + \epsilon v||_2$$

כפונקציה של ϵ? האם קיים ϵ כך ש-$x = y + v\epsilon$?

(ג) בדוק את התשובה שלך מסעיף (ב) לגבי ההתנהגות של $f(\epsilon)$ על ידי בחירת A מטריצה רנדומית 10×5 ו-b ווקטור רנדומי ממימד 5. צייר גרף של הפונקציה $f(\epsilon)$ עבור ערכים של ϵ בין -2 ל-2. יש לפרט את כל הפקודות ב-Matlab שנעזרת בהם.

4. בחור A מטריצה רנדומית מגודל 100×100, ומצא את מספר הערכים הסינגולריים של A בין 0 ל-1, בין 1 ל-2, בין 2 ל-3, בין 3 ל-4, בין 4 ל-5, בין 5 ל-6, ומעל 6. האם ההתפלגות הזאת משתנה כאשר משנים את A ? האם אתה יכול להסביר למה יש (כמעט) תמיד ערך סינגולרי אחד קרוב ל-50, וחוץ מזה שום ערך סינגולרי אחר מעל 6 ? מה אם A היא מטריצה רנדומית גדולה מגודל $m \times n$? בדוק את ההשערה שלך.

5. על ידי ניסויים עם מטריצות ממשיות מגודל $n \times n$, כאשר n הוא בין 100 ל-200, מצא את התלות של זמן הריצה במחשב על n לפקודות הבאות ב-Matlab:

(א) `lu` (כאשר רוצים למצוא גם L וגם U)

(ב) `chol`

(ג) `qr` (כאשר רוצים למצוא גם Q וגם R)

(ד) `eig` (כאשר רוצים לדעת גם את הערכים העצמיים וגם את הווקטורים העצמיים; יש לבדוק למטריצות סימטריות ולמטריצות לא סימטריות)

(ה) `svd` (כאשר רוצים לדעת את הפירוק המלא)

הערות: (1) ניתן להשתמש בפקודה `flops` ב-Matlab לבדוק את מספר הפעולות שנעשו במחשב. (2) לכל מטריצה ממשית A, המטריצה A^TA היא סימטרית וחיובית בהחלט.

6. בחור מטריצה מגודל 4×4 עם רכיבים שלמים על ידי הפקודה $\mathtt{A = floor(10 * rand(4, 4))}$. מצא ידנית, ובאופן מדויק, את פירוק ה-LU (עם pivoting) ואת פירוק ה-QR של A. בדוק את התשובות שלך ב-Matlab.

בחור מטריצה סימטרית וחיובית בהחלט מגודל 4×4, עם רכיבים שלמים, על ידי הפקודות $\mathtt{B = rand(4, 4)}$ ו- $\mathtt{A = floor(3 * B)' * floor(3 * B)}$. מצא ידנית, ובאופן מדויק, את פירוק ה-Choleski של A. בדוק את התשובה שלך ב-Matlab.