בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276

תרגילים 3

1. השתמש בשיטת ניוטון למצוא את 5 השורשים החיוביים הכי קטנים של המשוואה

$$\tan x = \frac{1}{x}$$

. למשוואה זו יש שורש קרוב ל-$n\pi$ עבור כל שלם חיובי n גדול. העזר בסיבוב אחד של שיטת ניוטון למצוא קירוב למרחק בין השורש ובין $n\pi$.

השתמש בשיטת ניוטון למצוא את 5 השורשים החיוביים הכי קטנים של המשוואה

$$\tan x = x$$

. למשוואה זו יש שורש קרוב ל-$(n+\frac{1}{2})\pi$ עבור כל שלם חיובי n גדול. העזר בסיבוב אחד של שיטת ניוטון למצוא קירוב למרחק בין השורש ובין $(n+\frac{1}{2})\pi$.

2. (א) מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון המשוואה $x^3 - x = 0$.

(ב) מה קורה אם מתחילים את הרקורסיה ב-$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$?

(ג) מה קורה אם מתחילים את הרקורסיה ב-$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$?

(ד)הוכח שאם מתחילים את הרקורסיה ב-x_0 כאשר $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ אזי הרקורסיה מתכנסת לשורש 0.

(ה) מצא את הקטע הכי גדול מסביב לשורש 1 כך שאם מתחילים את הרקורסיה בקטע זה היא מתכנסת ל-1.

3. מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ y^3 - 3yx^2 &= 0 \end{aligned}$$

בדוק את ההתכנסות הרקורסיה עבור בחירות שונות של נקודה התחלתית (x_0, y_0) מפוזרות במישור x, y, ובמיוחד לנקודות התחלתיות על ציר ה-x השלילי (מומלץ מאוד להעזר ב-Matlab!). מתי הרקורסיה מתכנסת, ולאיזה שורש ?

4. מצא, על ידי חיפוש יחס הזהב את המינימומים של הפונקציות הבאות על הקטע $[0, 3]$. כל הפונקציות הן חד-מודליות.

$$x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \sin x$$

$$x^2 + 4\cos x$$

5. (א) בשיעור למדנו חיפוש יחס הזהב רק למקרה של פונקציות חד-מודליות. האם ניתן להשתמש בשיטה גם למצוא מינימומים של פונקציה שאיננה חד-מודלית ? הסבר.

(ב) ידוע שיש לפונקציה הגזירה החד-מודלית $f(x)$ מינימום בקטע $[a,b]$. מה יותר מהר, למצוא את המינימום על ידי חיפוש יחס הזהב, או על ידי חציית הקטעים עבור הנגזרת $f'(x)$? מה יותר מדוייק ? יש להתייחס גם למקרה שיש לנו נוסחה מפורשת לנגזרת $f'(x)$ וגם למקרה שצריך לחשב אותו על ידי קירוב, לדוגמה

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

כאשר h קטן.

6. כתוב תוכנית ב-Matlab ליישם (א) את שיטת steepest descents ו-(ב) שיטת ניוטון למצוא את המינימום של הפונקצייה

$$f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

(ברור שהמינימום נמצא ב-$x = y = 1$). בדוק את ההתכנסות השיטה עבור בחירות שונות של נקודה התחלתית (x_0, y_0) מפוזרות במישור x, y. האם אתה יכול להסביר את האיטיות של steepest descents ?