בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276

תרגילים 4

1. לנתונים

x_i	0	1	2	4
y_i	1.2	2.1	2.3	0.5

(א) כתוב את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Lagrange.

(ב) מצא את פולינום הביון (אינטרפולציה) בצורת Newton.

(ג) מצא את ה-linear spline המחבר את הנתונים.

מצא את הערכים של פולינום הביון וה-linear spline ב-$x = 3$. איך היית משתמש ב-Matlab או Scilab כדי למצוא את הערך ב-$x = 3$ של ה-cubic spline המחבר את הנתונים ?

2. א. מצא את הפולינום היחיד $p(x)$ מדרגה 2 או פחות כך ש- $p(1) = 1$, $p(a) = b$, $p(0) = 0$, כאשר $0 < a < 1$.

ב. הסבר למה הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אינו מונוטוני עולה על הקטע $0 \le x \le 1$ אם $b < 0$ או $b > 1$. על ידי בדיקת המקרה $a = 1/2$, $b = 5/6$ הראה שגם אם $0 < b < 1$ ייתכן ש-$p(x)$ אינו מונוטוני עולה.

ג. הוכח שהפולינום שמצאת בסעיף א. הוא מונוטוני עולה על הקטע $0 \le x \le 1$ אם ורק אם $a^2 < b < a(2 - a)$.

3. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	α	1	2

כאשר α הוא מספר ממשי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0) = 1$, ומצא עוד שני ערכים של x, חוץ מ-0, כך ש-$p'(x) = 1$.

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

4. א. יהא $p(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a.

ב. יהא $p(x)$ cubic spline עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא, על ידי ניסוי במחשב, את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a עבור a (מספיק לקחת a בין 0 ל-50000).

ג. מה היא המשמעות של התוצאות שמצאת בסעיפים הקודמים לגבי רגישות פולינום הביון ורגישות ה- cubic spline לשינויים בנקודה אחת?