בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד א', סמסטר א' תשס"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $2 + 2 \times 25 + 6 \times 8$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

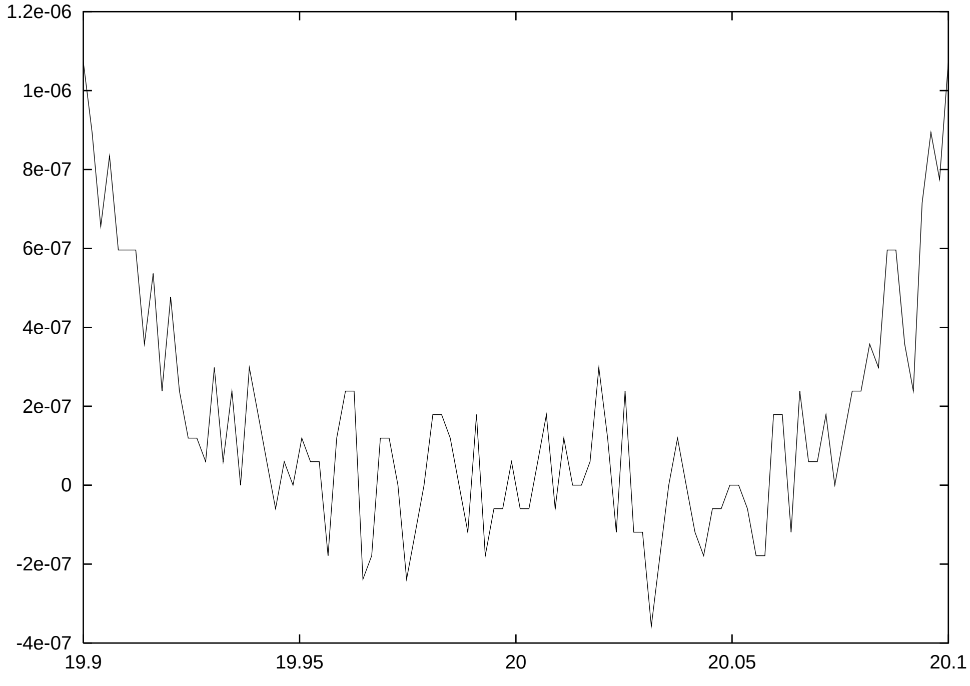
חלק א'

1. למשוואה $x \tan x = 1$ יש שורש בין $x = 0$ ו-$x = 1$. השתמש בשיטת חציית הקטעים למצוא את השורש ל-3 ספרות דיוק.

2. בקשתי מתוכנה גרפית נפוצה לצייר את הגרף של הפונקציה

$$x^6 - 120x^5 + 6000x^4 - 160000x^3 + 2400000x^2 - 19200000x + 64000000$$

על הקטע $19.9 \le x \le 20.1$. הגרף שקבלתי מופיע למטה, וברור לי שזה לא הגרף של פולינום מדרגה 6. מה קרה?



3. א. איזה פקודות היית כותב ב-Matlab כדי לחשב את הווקטורים Av, A^2v, A^3v, כאשר

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \ ?$$

(יש גם לתאר איך מכניסים את המטריצה A והווקטור v.)

ב. איזה פקודה היית כותב לפתור את המשוואה $Ax = v$?

ג. איזה פקודה היית כותב למצוא את הערכים העצמיים של A ?

4. מצא פולינום $p(x)$ מדרגה לא יותר מ-3 כך ש- $p(-1) = -1$, $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p(2) = 3$.

5. מצא פונקציה ליניארית שהיא קירוב, על הקטע $[-1,1]$, לפונקציה $f(x) = e^x - \frac{3}{2}x - 1$.
(נוסחת עזר: $\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$.)

6. השתמש בכלל סמפסון, עם $h = \frac{1}{4}$, למצוא קירוב ל-

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx \ .$$

חלק ב'

7. פתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \ .$$

האם הפתרון רגיש לשינויים קטנים ברכיבים של המטריצה? ברוק איך הפתרון משתנה אם משנים (קצת) את הרכיבים באלכסון הראשי של המטריצה. מה היא המשמעות של זה לגבי מצב המטריצה? האם מצב המטריצה טוב או רע?

8. א. כאשר משתמשים בשיטה $x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^5}{10}$ לפתור את המשוואה $\frac{x^5}{10} + x - 1 = 0$, החל מקירוב ראשון $x_0 = 1$, מקבלים תוצאות כדלהלן:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0.9000000	0.9409510	0.9262376	0.9318271	0.9297451	0.9305264	0.9302340

n	8	9	10	11	12	13	14
x_n	0.9303436	0.9303026	0.9303179	0.9303122	0.9303143	0.9303135	0.9303138

בדוק שההתכנסות של תוצאות אלה היא ליניארית, ומצא את גורם ההתכנסות, גם מניתוח התוצאות, וגם מהתוצאה התאורטית המתאימה.

ב. התוצאות עם שיטת ניוטון, עבור אותה משוואה, החל מקירוב ראשון $x_0 = 2$, הם

n	1	2	3	4
x_n	1.5333333333333	1.1664448298875	0.9678691374272	0.9311687131302

n	5	6	7	8
x_n	0.9303141663327	0.9303137377807	0.9303137377806	0.9303137377806

הראה שההתכנסות כאן היא ריבועית, כלומר, קיים קבוע A כך של-n מספיק גבוה, אם הטעות ב-x_n היא ϵ, אזי הטעות ב-x_{n+1} היא בערך $A\epsilon_n^2$.

9. א. הוכח, על ידי ההצבה $x = \sin^2\theta$ ש-

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\theta \cos^{2b+1}\theta \; d\theta \; .$$

ב. במקרה $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$, מצא קירובים לשני האנטגרלים בסעיף א על ידי כלל הטרפז עם 4 ועם 8 תת-קטעים (לכל אנטגרל יש להשתמש גם ב-4 וגם ב-8 תת-קטעים).

ג. לפי דעתך, איזה מ-2 האנטגרלים נותן תוצאות יותר מדויקות? הסבר!

10. בשאלה זאת נדון בקירובים לפונקציה $\sin(bx)$, כאשר $0 < b \leq \frac{\pi}{2}$, על הקטע $[-1, 1]$. ל-b נתון, נחפש a כך ש-ax הוא קירוב טוב ל-$\sin(bx)$.

א. הסבר, דרך גרף, למה יש לבחור a כך ש- $\sin b \leq a \leq b$.

ב. איזה בחירה של a נובעת מהדרישה ש-

$$S_w = \int_{-1}^1 w(x)(ax - \sin(bx))^2 dx$$

יהיה מנימלי? כאן $w(x)$ היא פונקציית משקל כל שהיא על הקטע $[-1, 1]$.

ג. הוכח שה-a שמצאת בסעיף ב ממלא את הקריטריון שהסברת בסעיף א.

בהצלחה!!