בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

שיטות נומריות, 88-376

מבחן מועד ב', סמסטר א' תשס"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $6 \times 8 + 2 \times 25 + 2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. כתבתי, ב-Matlab, $x = [1\ 3\ 6\ 10]$, ואחר כך חמש פעמים את הפקודה

$$x = x - 0.001 * \cos(x)./(\cos(x + 0.001) - \cos(x))$$

קבלתי את התגובות הבאות:

$$\begin{array}{ccrrrr}
x & = & 1 & 3 & 6 & 10 \\
x & = & 1.6419 & -4.0399 & 2.5577 & 11.5412 \\
x & = & 1.5707 & -4.8365 & 1.0430 & 10.9339 \\
x & = & 1.5708 & -4.7118 & 1.6258 & 10.9957 \\
x & = & 1.5708 & -4.7124 & 1.5707 & 10.9956 \\
x & = & 1.5708 & -4.7124 & 1.5708 & 10.9956
\end{array}$$

הסבר!

2. בתקן float, כמה מספרים יש בין 1024 ובין $1024\frac{1}{1024}$? כמה יש בתקן double ?

3. אם A ו-B הם שתי מטריצות $d \times d$ ב-Matlab, איזה תגובות הייתי מקבל לפקודות $A * B$, $A. * B$, $B * .A$, $A\backslash B$, B/A, $B./A$, $\mathrm{inv}(A)\ B$?

4. מצא את הישר שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1.0	0.9	1.2	1.5

5. מצא פולינומים מדרגות $0,1,2$ שהם אורתוגונליים על הקטע $[-1,1]$ ביחס למשקל

$$w(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

6. חשב על ידי תרבוע גאוס עם $n=3$ את האנטגרל

$$\int_{-1}^{1} \sin(\cos(\tfrac{1}{2}x))dx \quad .$$

חלק ב'

7. א. כתוב את הרקורסיה של ניוטון לפתרון המשוואה

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\ dt = \frac{1}{2}$$

ב. השתמש בסיבוב אחד של הרקורסיה כדי לשפר את הקירוב הראשון לשורש $x = 1.5$.
חשב את האנטגרל הרלבנטי עם כלל הטרפז עם 4 תת-קטעים.

ג. בסיבוב הבא, בכמה תת-קטעים היית ממליץ להשתמש כדי למצוא את האנטגרל הרלבנטי?

8. בשאלה זאת נדון בקירובים לעקומה $f(x)=x^2$ על הקטע $[0,1]$ על ידי קו ישר $p(x)=\alpha x+\beta$.
הטעות בנקודה x מוגדרת להיות $|f(x)-p(x)|$. ניתן להניח שבוחרים α,β כך שקיימות שתי נקודות $x_1 < x_2$ בקטע $[0,1]$ שבהן הטעות היא 0, כלומר $p(x)=f(x)$.

א. צייר גרף של $f(x)$ ו-$p(x)$, ומצא ביטויים (באמצעות α,β) לטעות המקסימלית בקטעים $0 \le x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, ו- $x_2 < x \le 1$.

ב. איך יש לבחור α,β כך ש-3 הטעויות האלה הם זהות?

ג. איזה בחירה של α,β נובעת מהקירוב הסטנדרטי על ידי פולינומי לז'נדר?

9. א. הוכח שהרקורסיה הליניארית

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\omega A + (1-\omega)I)\mathbf{x}_n + \omega \mathbf{b}$$

מתכנסת אם ורק אם כל הערכים העצמיים λ של A מקיימים

$$. 1 - \frac{2}{\omega} < \lambda < 1$$

כאן A היא מטריצה $d \times d$ עם ערכים עצמיים ממשיים, $\mathbf{b}$ הוא וקטור d-מימדי, ω מספר חיובי ו-I מסמנת את מטריצת היחידה בגודל $d \times d$.

ב. אם הרקורסיה מתכנסת, מה היא $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$?

ג. אם אני יודע שכל הערכים העצמיים של A הם בין -5 ו-1 (בין ממש, לא כולל), באיזה ω יש לי להשתמש ברקורסיה כדי לקבל התכנסות? אם כל הערכים העצמיים הם בין -1 ו-1, האם היית ממליץ על אותו ω ?

10. "נוסחת אנטגרציה בעלת 2 נקודות" היא נוסחת קירוב לחישוב אנטגרלים על הקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ מהצורה

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

א. מצא את x_1, x_2, w_1, w_2 כך שנוסחה זו מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1, x, x^2, x^3$.

ב. מצא את x_1, x_2, w_1, w_2 כך שנוסחה זו מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1, \sin x, \cos x, \sin 2x$.

ג. חשב קירובים ל-$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x dx$ דרך 2 הנוסחאות שמצאת. איזה יוצא להיות יותר מדוייק?

בהצלחה!!