בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד ב', סמסטר א' תשס"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 = 2$ (בונוס אוטומטי) $6 \times 8 + 2 \times 25 + 2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. כתבתי, ב-Matlab, $x = [1\ 3\ 6\ 10]$, ואחר כך חמש פעמים את הפקודה

$$x = x - 0.001 * \cos(x)./(\cos(x + 0.001) - \cos(x))$$

קבלתי את התגובות הבאות:

$$\begin{array}{ccrrrr} x & = & 1 & 3 & 6 & 10 \\ x & = & 1.6419 & -4.0399 & 2.5577 & 11.5412 \\ x & = & 1.5707 & -4.8365 & 1.0430 & 10.9339 \\ x & = & 1.5708 & -4.7118 & 1.6258 & 10.9957 \\ x & = & 1.5708 & -4.7124 & 1.5707 & 10.9956 \\ x & = & 1.5708 & -4.7124 & 1.5708 & 10.9956 \end{array}$$

הסבר!

רקורסיית ניוטון לפתרון $f(x) = 0$ היא $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. אם עושים קירוב ל-$f'(x)$ על ידי $f'(x) \approx (f(x+h) - f(x))/h$, מקבלים "קירוב לניוטון"

$$x_{n+1} = x_n - \frac{hf(x_n)}{f(x_n + h) - f(x_n)}$$

כאן אני מבקש מ-Matlab לבצע רקורסיה זו למקרה ש-$f(x) = \cos(x)$. רואים שכאשר מתחילים מ-$1, 3, 6, 10$ מקבלים התכנסות מהירה ל-$\pi/2, -3\pi/2, \pi/2, 7\pi/2$ בהתאם.

2. בתקן float, כמה מספרים יש בין 1024 ובין $1024\frac{1}{1024}$? כמה יש בתקן double ?

בתקן float יש 24 סיביות במנטיסה, ולכן

$$1024 = 10\ 000\ 000\ 000\ .\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0$$
$$1024\frac{1}{1024} = 10\ 000\ 000\ 000\ .\ 000\ 000\ 000\ 100\ 0$$

ויש 7 מספרים אחרים ביניהם. בתקן double יש 53 סיביות במנטיסה, ולכן במקום $2^{24-21}-1$ מספרים בין 1024 ו-$1024\frac{1}{1024}$ יש $2^{53-21}-1 = 2^{32}-1 \approx 4\times 10^9$.

3. אם A ו-B הם שתי מטריצות $d\times d$ ב-Matlab, איזה תגובות הייתי מקבל לפקודות $A*B$, $A.*B$, $B*.A$, $A\backslash B$, B/A, $B./A$, $\mathrm{inv}(A)\ B$?

$A*B$ כפל מטריצי, חישוב AB.
$A.*B$ כפל רכיב-רכיב
$B*.A$ טעות, אין פקודה כזאת.
$A\backslash B$ מחשב $A^{-1}B$.
B/A מחשב BA^{-1}.
$B./A$ חילוק רכיב-רכיב של B על ידי A.
$\mathrm{inv}(A)\ B$ שוב טעות.

4. מצא את הישר שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1.0	0.9	1.2	1.5

ריבועים מזעריים: $y=\alpha x+\beta$ כאשר

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum x_i y_i \\ \sum y_i\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1.25 & 2.1 \\ 2.1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.58 \\ 4.6\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{0.59}\begin{pmatrix} 4 & -2.1 \\ -2.1 & 1.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.58 \\ 4.6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.12 \\ 0.56\end{pmatrix}$$

5. מצא פולינומים מדרגות $0,1,2$ שהם אורתוגונליים על הקטע $[-1,1]$ ביחס למשקל

$$w(x) = \begin{cases} 1 & |x|<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x|>\frac{1}{2} \end{cases}$$

סימטריה תחת $x \to -x$ גוררת ש $p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2+a$ באשר a קבוע. a נקבע על ידי הדרישה ש-

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)w(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{1} p_0(x)p_2(x)w(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{1/2}(x^2+a)dx + \int_{1/2}^{1}(x^2+a)dx \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}+\frac{a}{2}+\frac{1}{3}+a \\
&= \frac{3a}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

לכן $a=-1/4$.

6. חשב על ידי תרבוע גאוס עם $n=3$ את האנטגרל

$$\int_{-1}^{1}\sin(\cos(\tfrac{1}{2}x))dx \quad .$$

תרבוע גאוס עם $n=3$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

כאן $f(x)=\sin(\cos(\frac{1}{2}x))$ (פונקציה זוגית)

$$\int_{-1}^{1}\sin(\cos(\tfrac{1}{2}x))dx \approx \frac{10}{9}\sin\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}\sin 1 \approx 1.635954$$

(תשובה מדוייקת ל-7 ספרות 1.635973. הגענו לדיוק גבוה מאוד!)

חלק ב'

7. א. כתוב את הרקורסיה של ניוטון לפתרון המשוואה

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\ dt = \frac{1}{4}$$

ב. השתמש בסיבוב אחד של הרקורסיה כדי לשפר את הקירוב הראשון לשורש $x = 1.5$.
חשב את האנטגרל הרלבנטי עם כלל הטרפז עם 4 תת-קטעים.

ג. בסיבוב הבא, בכמה תת-קטעים היית ממליץ להשתמש כדי למצוא את האנטגרל הרלבנטי?

א. ברצוננו לפתור את המשוואה $f(x) = 0$ כאשר

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt - \frac{1}{4}$$

הרקורסיה היא

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\int_0^{x_n} \frac{\sin t}{1+t}dt - \frac{1}{4}}{\frac{\sin x_n}{1+x_n}}$$

ב. אם ניקח $x_0 = 1.5$,

$$x_1 = 1.5 - \frac{\int_0^{1.5} \frac{\sin t}{1+t}dt - \frac{1}{4}}{\frac{\sin 1.5}{2.5}}$$

על ידי כלל הטרפז עם 4 צעדים

$$\int_0^{1.5} \frac{\sin t}{1+t}dt \approx \frac{1.5}{8}\left(\frac{\sin 0}{1} + 2\frac{\sin 0.375}{1.375} + 2\frac{\sin 0.75}{1.75} + 2\frac{\sin 1.125}{2.125} + \frac{\sin 1.5}{2.5}\right) \approx 0.480$$

ולכן $x_1 \approx 0.924$.

ג. השינוי בין x_0 ל-x_1 די משמעותי, ולכן אין סיבה לחשוב שהגענו קרוב במיוחד לשורש. אם ממשיכים את הרקורסיה, ורואים שהקירובים לא משתנים הרבה (סימן שאנחנו קרובים לשורש), אז כדאי לשפר את הקירוב לאנטגרל על ידי שימוש ביותר צעדים. אבל בשלב הזה אין סיבה להגדיל מספר הצעדים בו משתמשים לקירוב האנטגרל.

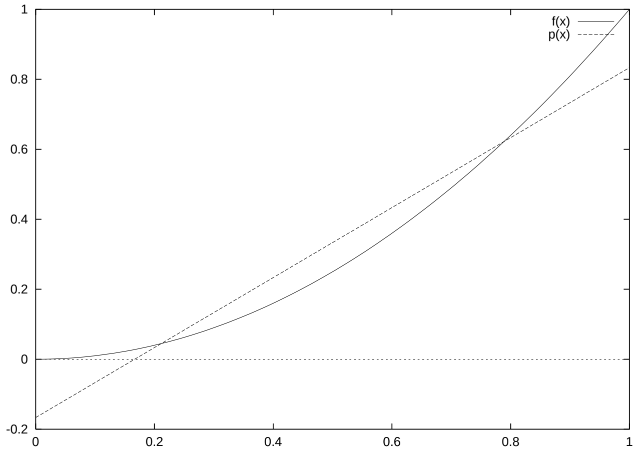
8. בשאלה זאת נדון בקירובים לעקומה $f(x)=x^2$ על הקטע $[0,1]$ על ידי קו ישר $p(x)=\alpha x+\beta$. הטעות בנקודה x מוגדרת להיות $|f(x)-p(x)|$. ניתן להניח שבוחרים α,β כך שקיימות שתי נקודות $x_1<x_2$ בקטע $[0,1]$ שבהן הטעות היא 0, כלומר $p(x)=f(x)$.

א. צייר גרף של $f(x)$ ו-$p(x)$, ומצא ביטויים (באמצעות α,β) לטעות המקסימלית בקטעים $0\le x<x_1$, $x_1<x<x_2$, ו- $x_2<x\le 1$.

ב. איך יש לבחור α,β כך ש-3 הטעויות האלה הם זהות?

ג. איזה בחירה של α,β נובעת מהקירוב הסטנדרטי על ידי פולינומי לז'נדר?

א. היות ורוצים שיהיו 2 נקודות חיתוך בין $p(x)$ ו-$f(x)$ הגרף בהכרח נראה כך:



רואים ש-$\alpha>0$, $\beta<0$.

הטעות הכי גדולה בקטע בין 0 ל-x_1 היא כאשר $x=0$, והיא $-\beta$.

הטעות הכי גדולה בקטע בין x_2 ל-1 היא כאשר $x=1$, והיא $1-\alpha-\beta$.

הטעות הכי גדולה בקטע בין x_1 ל-x_2 היא הערך המקסימלי של $\alpha x+\beta-x^2$. על ידי נגזרת רואים שהמקסימום של פונקציה זו הוא כאשר $\alpha=2x$, ולכן הטעות המקסימלית היא $\alpha^2/4+\beta$.

ב. שלוש הטעויות הן שוות אם $\alpha^2/4+\beta=1-\alpha-\beta=-\beta$. מהשוויון הראשון מקבלים ש-$\alpha=1$, מהשוויון השני מקבלים ש-$\beta=-1/8$. קבלנו $\alpha x+\beta=x-1/8$ כקירוב ל-x^2 בקטע $[0,1]$.

ג. בקירובים על ידי פולינומי לג'נדר בוחרים α,β כדי ש- $S=\int_0^1(x^2-\alpha x-\beta)^2dx$ יהיה מינימלי. לקבל מינימום יש לדרוש ש-

$$0=\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int_0^1 x(x^2-\alpha x-\beta)dx=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}$$

$$0=\frac{\partial S}{\partial \beta}=\int_0^1 (x^2-\alpha x-\beta)dx=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}-\beta$$

פותרים לקבל $\alpha=1,\beta=-1/6$. קבלנו $\alpha x+\beta=x-1/6$ כקירוב ל-x^2 בקטע $[0,1]$.

9. א. הוכח שהרקורסיה הליניארית

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\omega A + (1-\omega)I)\mathbf{x}_n + \omega\mathbf{b}$$

מתכנסת אם ורק אם כל הערכים העצמיים λ של A מקיימים

$$1 - \frac{2}{\omega} < \lambda < 1 \; .$$

כאן A היא מטריצה $d \times d$ אם ערכים עצמיים ממשיים, $\mathbf{b}$ הוא ווקטור d-מימדי, ω מספר חיובי ו-I מסמנת את מטריצת היחידה בגודל $d \times d$.

ב. אם הרקורסיה מתכנסת, מה היא $\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$?

ג. אם אני יודע שכל הערכים העצמיים של A הם בין -5 ו-1 (בין ממש, לא כולל), באיזה ω יש לי להשתמש ברקורסיה כדי לקבל התכנסות? אם כל הערכים העצמיים הם בין -1 ו-1, האם היית ממליץ על אותו ω ?

א. $\mathbf{x}_{n+1} = H\mathbf{x}_n + \beta$ מתכנסת אם ורק אם $\rho(H) < 1$, כאשר $\rho(H)$ הוא הרדיוס הספקטרלי של H. בשבילנו $H = \omega A + (1-\omega)I$. μ הוא ערך עצמי של H אם ורק אם

$$\begin{aligned} &\det(H - \mu I) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\det(\omega A + (1-\omega)I - \mu I) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\det\left(A - \left(\frac{\mu+\omega-1}{\omega}\right) I\right) = 0 \end{aligned}$$

כלומר אם ורק אם $(\mu+\omega-1)/\omega$ הוא ערך עצמי של A. תנאי מספיק והכרחי להתכנסות הרקורסיה הוא ש-

$$\begin{aligned} &-1 < \mu < 1 \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{1}{\omega} < \frac{\mu}{\omega} < \frac{1}{\omega} \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{1}{\omega} + \frac{\omega-1}{\omega} < \frac{\mu}{\omega} + \frac{\omega-1}{\omega} < \frac{1}{\omega} + \frac{\omega-1}{\omega} \\ \Leftrightarrow\ &1 - \frac{2}{\omega} < \frac{\mu+\omega-1}{\omega} < 1 \end{aligned}$$

ולכן יש לנו התכנסות אם ורק אם כל ערך עצמי λ של A מקיים

$$1 - \frac{2}{\omega} < \lambda < 1$$

ב. אם הרקורסיה מתכנסת ל-$\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = (\omega A + (1-\omega)I)\mathbf{x} + \omega\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow\ &0 = \omega A\mathbf{x} - \omega\mathbf{x} + \omega\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow\ &(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

הרקורסיה מתכנסת לפתרון $\mathbf{x}$ של $(I-A)\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

ג. אם נתון ש-$-5<\lambda<1$ אזי יש לנו לבחור $1-2/\omega\leq -5$ כדי לקבל התכנסות, כלומר $\omega\leq 1/3$. אם כל ערך עצמי λ של A בין -1 ו-1, הערכים העצמיים $(1-\omega)+\omega\lambda$ של H יהיו בין $1-2\omega$ ו-1. לכן אם $\omega\leq 1/3$ ודאי יהיה התכנסות, אבל "חבל" לבחור כזה ω שיתן כל הערכים העצמיים של H בין $1/3$ ל-1. ההתכנסות ישתפר ל-ω גבוה יותר.

10. "נוסחת אנטגרציה בעלת 2 נקודות" היא נוסחת קירוב לחישוב אנטגרלים על הקטע $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ מהצורה

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \approx w_1 f(x_1)+w_2 f(x_2)$$

א. מצא את x_1,x_2,w_1,w_2 כך שנוסחה זו מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1,x,x^2,x^3$.

ב. מצא את x_1,x_2,w_1,w_2 כך שנוסחה זו מדוייקת עבור 4 הפונקציות $1,\sin x,\cos x,\sin 2x$.

ג. חשב קירובים ל-$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x dx$ דרך 2 הנוסחאות שמצאת. איזה יוצא להיות יותר מדוייק?

א. כדי שהקירוב יהיה מדויק ל-4 הפונקציות $1,x,x^2,x^3$ נדרוש ש-

$$\pi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dx = w_1+w_2$$
$$0=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xdx = w_1x_1+w_2x_2$$
$$\frac{\pi^3}{12}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2dx = w_1x_1^2+w_2x_2^2$$
$$0=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3dx = w_1x_1^3+w_2x_2^3$$

מהמשוואה השנייה $w_2x_2=-w_1x_1$. מציבים זה במשוואה הרביעית ומקבלים ש-$x_1^2=x_2^2$, והיות ואנחנו רוצים x_1,x_2 להיות שונים, נקח $x_2=-x_1$. עכשיו מהמשוואה השנייה לומדים ש-$w_2=w_1$, ומהמשוואה הראשונה ש-$w_1=w_2=\pi/2$. נשאר להציב במשוואה השלישית ומקבלים ש-$x_1^2=x_2^2=\pi^2/12$, ולכן ניקח $x_1=-x_2=\pi/\sqrt{12}$.

ב. כדי שהקירוב יהיה מדויק ל-4 הפונקציות $1, \sin x, \cos x, \sin 2x$ נדרוש ש-

$$\pi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dx = w_1 + w_2$$
$$0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin xdx = w_1 \sin x_1 + w_2 \sin x_2$$
$$2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos xdx = w_1 \cos x_1 + w_2 \cos x_2$$
$$0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2xdx = w_1 \sin 2x_1 + w_2 \sin 2x_2$$

מהמשוואה השנייה $w_2 \sin x_2 = -w_1 \sin x_1$. מציבים זה במשוואה הרביעית ומקבלים ש-$\cos x_1 = \cos x_2$. היות ואנחנו רוצים x_1, x_2 להיות שונים, וגם בין $-\pi/2$ ל-$\pi/2$, נקח $x_2 = -x_1$. עכשיו מהמשוואה השנייה לומדים ש-$w_2 = w_1$, ומהמשוואה הראשונה ש-$w_1 = w_2 = \pi/2$. נשאר להציב במשוואה השלישית ומקבלים ש-$\cos x_1 = \cos x_2 = 2/\pi$, ולכן ניקח $x_1 = -x_2 = \arccos(2/\pi)$.

ג. מדויק:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = [e^x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} \approx 4.603$$

קירוב ראשון:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = \frac{\pi}{2} \left(e^{\pi/\sqrt{12}} + e^{-\pi/\sqrt{12}} \right) \approx 4.525$$

קירוב שני:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = \frac{\pi}{2} \left(e^{\arccos(2/\pi)} + e^{-\arccos(2/\pi)} \right) \approx 4.441$$

קירוב ראשון מנצח!