בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   ד"ר יעקוב קרסנוב

מבחן מועד א1', סמסטר א' תשס"ג   פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. לפי התאוריה, השורש הקטן של המשוואה הריבועית

$$ax^2 - 200x + 0.001 = 0$$

שואף ל-0.5×10^{-5} כאשר הפרמטר החיובי a שואף ל-0. אבל כאשר מנסים לבדוק את זה ב-Matlab או Scilab, על ידי שכותבים

```
a = [1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3];
b = (200-sqrt(200^2-4*0.001*a))./(2*a)
```

מקבלים את התוצאה

```
b = 1.0e-05 * [0.4263 0.4974 0.5002 0.5001 0.5000 0.5000]
```

למה יש טעויות גבוהות לערכים נמוכים של a? הסבר למה תיתכן שגיאה יחסית מסדר גודל 10^{-4} כאשר $a = 10^{-5}$.

הפקודות ב-Matlab מיישמות את הנוסחה לפתרון (הקטן) של המשוואה הריבועית

$$\frac{200 - \sqrt{200^2 - 4 \cdot 0.001a}}{2a}$$

עבור $a = 10^{-8}, 10^{-7}, \ldots, 10^{-3}$. בגלל שהמספר בתוך השורש הוא מסדר גודל של 4×10^4, יש בו שגיאת עיגול (מוחלטת) מסדר גודל $4\times10^4\epsilon$, כאשר ϵ הוא דיוק המחשב, $\epsilon = O(10^{-16})$. כלומר, במונה של הביטוי יש שגיאה מוחלטת מסדר גודל 10^{-12}, ולכן בתשובה הסופית יש שגיאה מוחלטת מסדר גודל $10^{-12}/a$. היות והתשובה הסופית הנכונה היא מסדר גודל 10^{-5}, השגיאה היחסית יכולה להגיע עד $10^{-7}/a$.
התשובות לשאלות: הסיבה למה השגיאה עולה כאשר a יורדת היא שיש שגיאת עיגול במונה שאיננה תלויה ב-a, ולכן השגיאה המוחלטת הכוללת מתנהגת כ-$1/a$. ומהאומדנים שעשינו,

כאשר $a = 10^{-5}$ היתה יכולה שגיאת העיגול הייחסית להגיע אפילו עד ל-10^{-2} כאשר $a = 10^{-5}$. (מסתבר שהשורש דווקא מוריד את שגיאת העיגול, כך שהשגיאה המוחלטת במונה היא רק כ-200ϵ).

---

2. א. מה היא שיטת ניוטון לפתרון מערכת d משוואות עם d נעלמים $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$? (כאן $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ ו-$\mathbf{f}$ היא פונקציה מ-$\mathbf{R}^d$ ל-$\mathbf{R}^d$)?

ב. כתוב במפורש את הרקורסיה שמקבלים משיטת ניוטון עבור המערכת

$$\begin{aligned} x + y + y^2 &= 0 \\ 1 + x^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

ג. על ידי העברת המערכת למשוואה אחת (עבור x או y), מצא, ל-3 ספרות דיוק, את הפתרון של המערכת בסעיף ב. שהוא קרוב ל-$x = -0.5, y = -1.5$.

א.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - M^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

כאשר M היא מטריצת הג'קוביאן עם רכיבים

$$M_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_n)$$

ב.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n - M^{-1}\begin{pmatrix} x_n + y_n + y_n^2 \\ 1 + x_n^2 + y_n \end{pmatrix}$$

כאשר

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2y_n \\ 2x_n & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$M^{-1} = \frac{1}{1 - 2x_n - 4x_n y_n}\begin{pmatrix} 1 & -1 - 2y_n \\ -2x_n & 1 \end{pmatrix}$$

קצת יותר מפורש:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - 2x_n - 4x_n y_n}\begin{pmatrix} 1 & -1 - 2y_n \\ -2x_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n + y_n + y_n^2 \\ 1 + x_n^2 + y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - 2x_n - 4x_n y_n}\begin{pmatrix} -1 + x_n - x_n^2 - 2y_n - y_n^2 - 2y_n x_n^2 \\ 1 - x_n^2 + y_n - 2x_n y_n - 2x_n y_n^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - 2x_n - 4x_n y_n}\begin{pmatrix} 1 + 2y_n + y_n^2 - x_n^2 - 2x_n^2 y_n \\ -1 + x_n^2 - 2x_n y_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ג. אם, לדוגמה, משתמשים במשוואה הראשונה לכתוב $x=-y(1+y)$, מהשני מוצאים ש-

$$1+y^2(1+y)^2+y=0$$

לא מחפשׂחים את השורש $y=-1$, לכן אפשר לצמצם גורם $1+y$ לקבל

$$1+y^2+y^3=0$$

שיטת ניוטון עבור זה:

$$y_{n+1}=y_n-\frac{1+y_n^2+y_n^3}{2y_n+3y_n^2}=\frac{2y_n^3+y_n^2-1}{2y_n+3y_n^2}$$

אם לוקחים $y_0=-1.5$ מקבלים $y_1=-1.4667$ ו-$y_2=-1.4656$. ולכן ל-3 ספרות דיוק הפתרון הדרוש הוא $x=-0.682, y=-1.47$.

---

3. א. אם נתונה מטריצה

$$\mathtt{A}=\begin{bmatrix} 0.12 & 2.12 & 0.40 & 1.22 \\ 6.11 & 1.12 & 1.17 & 0.23 \\ 1.01 & -2.21 & 0.54 & -0.55 \\ 3.01 & 0.44 & 3.38 & 0.54 \end{bmatrix}$$

ואני כותב `eig(A)` ב-Matlab או `spec(A)` ב-Scilab אני מקבל כתשובה את הווקטור

$$\begin{bmatrix} 3.8618978 \\ -2.5319143 \\ -1.1495113 \\ 2.1395278 \end{bmatrix}$$

מה הוא הווקטור הזה ? איך ניתן לקבל את כל הערכים העצמיים ואת כל הווקטורים העצמיים של `A` ?

ב. אם ב-Matlab או Scilab כותבים את הפקודות

```
A  = [  1054   557   405   148;
        -265  -115   -89   -26;
         666   327   243    82;
       -1202  -639  -465  -171  ]
b1 = [ 704.5;  -184.9;  454.2;  -803.8 ]
b2 = [ 704.7;  -185.0;  453.3;  -802.6 ]
b3 = [ 704.5;  -187.0;  455.8;  -800.3 ]
x1 = A\b1
x2 = A\b2
x3 = A\b3
```

אזי מקבלים את התוצאות

$$\texttt{x1} = \begin{pmatrix} -0.0534051 \\ 0.1489345 \\ 3.5205294 \\ -5.0539323 \end{pmatrix} \qquad \texttt{x2} = \begin{pmatrix} 0.7031195 \\ -0.1883787 \\ 0.4647408 \\ -0.8086555 \end{pmatrix} \qquad \texttt{x3} = \begin{pmatrix} 0.7161467 \\ 0.7897298 \\ -0.4191235 \\ -2.1652241 \end{pmatrix}$$

מה ניתן להסיק, מתוצאות אלה, לגבי מספר המצב של-A? (יש לתת אומדן כמותי למספר המצב. ניתן לעבוד בכל נורמה שתרצה.)

א. הווקטור הוא ווקטור עם 4 הערכים העצמיים של המטריצה `A`. כדי לקבל את כל הערכים והווקטורים העצמיים כותבים (ב-Matlab)

```
[U D] = eig(A)
```

`D` תהיה מטריצה אלכסונית עם הערכים העצמיים על האלכסון. `U` תהיה מטריצה כך שכל עמודה שלה היא ווקטור עצמי.

ב. בנורמה ∞:

$$\begin{aligned} ||x_1|| &= 5.05 & ||b_1|| &= 804 \\ ||x_2|| &= 0.809 & ||b_2|| &= 803 \\ ||x_3|| &= 2.17 & ||b_3|| &= 800 \\ ||x_1 - x_2|| &= 4.24 & ||b_1 - b_2|| &= 1.2 \\ ||x_1 - x_3|| &= 3.94 & ||b_1 - b_3|| &= 3.5 \\ ||x_2 - x_3| &= 1.36 & ||b_2 - b_3|| &= 2.5 \end{aligned}$$

לכל זוג של תוצאות מקבלים אומדן של $\kappa(A)$, בגלל ש

$$\frac{||x_i - x_j||}{||x_i||} \leq \kappa(A) \frac{||b_i - b_j||}{||b_i||}$$

כלומר:

$$\kappa(A) \geq \frac{||x_i - x_j||}{||x_i||} \cdot \frac{||b_i||}{||b_i - b_j||}$$

יש לבחור i, j כך ש-$||x_i - x_j||$ כמה שאפשר יותר גדול, $||x_i||$ כמה שאפשר יותר קטן, ו-$||b_i - b_j||$ כמה שאפשר יותר קטן (הערכים $||b_i||$ כולם קרובים זה לזה). למזלנו, ניתן לעשות את כל הדברים האלה על ידי בחירת $i = 2, j = 1$. ומקבלים

$$\kappa(A) \geq \frac{4.24 \cdot 803}{0.809 \cdot 1.2} \approx 3500$$

זה האומדן הכי טוב ל-$\kappa(A)$ שניתן עם נתונים אלה.

---

4. נדרש למצוא קירוב לפונקציה $f(x)=x^3$ על הקטע $[-1,1]$ על ידי פולינום $p(x)$ מדרגה 2.
   א. מצא כזה קירוב על ידי הדרישה ש-$p(x_i)=f(x_i)$ כאשר $x_i=-1,a,1$, כאשר a הוא מספר ממשי כל שהוא בין -1 ל-1. כלומר, יש לדרוש ש- $p(-1)=-1$, $p(a)=a^3$, $p(1)=1$.
   ב. הוכח שאם מציבים $a=1$ בפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אזי $p(-1)=f(-1)$, $p(1)=f(1)$, $p'(1)=f'(1)$. ואם מציבים $a=-1$ אזי $p(-1)=f(-1)$, $p(1)=f(1)$, $p'(-1)=f'(-1)$.
   ג. הוכח: תהא $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, $a>b$, ותהא $p(x)$ פונקציה ליניארית כך ש-$p(a)=f(a)$, $p(b)=f(b)$. יהא $P(x)$ הגבול של $p(x)$ כאשר b שואף ל-a. אזי $P(a)=f(a)$, $P'(a)=f'(a)$.

א. נשתמש בשיטת ניוטון. טבלת הפרשים מחולקים:

x_i	y_i		
-1	-1		
a	a^3	$\frac{a^3+1}{a+1}=a^2-a+1$	
1	1	$\frac{1-a^3}{1-a}=a^2+a+1$	a

ולכן פולינום הביון הוא

$$p(x)=-1+(a^2-a+1)(x+1)+a(x+1)(x-a)=a(x^2-1)+x$$

ב. אם מציבים $a=1$ מקבלים $p(x)=x^2+x-1$, שמקיים $p(-1)=-1$, $p(1)=1$, $p'(1)=3=f'(1)$.
אם מציבים $a=-1$ מקבלים $p(x)=-x^2+x+1$, שמקיים $p(-1)=-1$, $p(1)=1$, $p'(-1)=3=f'(-1)$.

ג. יש הרבה דרכים לכתוב את $p(x)$. הכי טוב בשבילנו הוא

$$p(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

רואים מיד שכאשר $b\to a$ מקבלים $p(x)\to P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, שמקיים $P(a)=f(a)$, $P'(a)=f'(a)$.

---

5. א. הסבר, בקיצור, איך ניתן לעשות קירוב פולינומי לפונקציה $f(x)$ על הקטע $[-1,1]$ על ידי שיטת ריבועיים מזעריים (ריבועים זעירים) עם פונקציית משקל $w(x)=1$.

ב. מצא, באותה שיטה, קירוב ליניארי לפונקציה

$$f(x)=\frac{7+x}{1+x^2}$$

בקטע $[-1,1]$. ניתן לחשב כל אנטגרל רלבנטי על ידי כלל הטרפז, עם n לא קטן מ-4.
תזכורות:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}\ dx=0\ ,\qquad \int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^2}\ dx=2$$

א. אם רוצים קירוב מדרגה n, הקירוב נתון על ידי

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iP_i(x)$$

כאשר ה-$P_i(x)$ הם פולינומי Legendre וה-a_i מוצאים על ידי

$$a_i=\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}f(x)P_i(x)dx$$

ב. היות ו-$P_0(x)=1$ ו-$P_1(x)=x$

$$a_0=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{7+x}{1+x^2}dx=\tfrac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\tfrac{7}{2}[\arctan(x)]_{-1}^{1}\approx 5.50$$
$$a_1=\tfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{7x+x^2}{1+x^2}dx=\tfrac{3}{2}\left(2-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\right)=3(1-\arctan(1))\approx 0.644$$

הקירוב הוא $p(x)=5.50+0.644x$. אם לא יודעים את האינטגרלים כאן, ניתן לעשות אותם על ידי כלל הטרפז.

---

6. א. מצא את המספרים w ו-$a>0$ כך שנוסחת התרבוע

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)dx\approx w(f(a)+f(-a))$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה עד 3.

ב. השתמש בתוצאה שלך מסעיף א. למצוא קירוב ל-

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos x\ dx$$

ג. מצא קירובים לאנטגרל מסעיף ב. על ידי כלל הטרפז עם 2 ו-4 קטעים. מה, לדעתך, יהיה יותר מדויק: קירוב על ידי כלל הטרפז עם 16 צעדים או הקירוב שמצאת בסעיף ב. ?

א. כאשר מציבים $f(x) = x$ או $f(x) = x^3$ מוצאים שני הצדים אפס. לכן רק צריך לבדור עבור $f(x) = 1$ ו-$f(x) = x^2$. הראשון נותן $2w = \frac{4}{3}$, כלומר $w = \frac{2}{3}$, השני נותן $2wa^2 = \frac{4}{15}$, כלומר $a = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$.

ב. על ידי הנוסחה מסעיף א.

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos x \; dx \approx \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)\right) \approx 1.202$$

ג. כלל טרפז עם שני צעדים

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos x \; dx \approx \frac{1}{2}\left(0+2+0\right) = 1$$

עם 4 צעדים

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos x \; dx \approx \frac{1}{4}\left(0 + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\right) + 0\right) \approx 1.158$$

נניח שערך המדויק של האנטגרל הוא I. אזי לפי חוק התנהגות הטעות של כלל הטרפז, אם $I+\epsilon = 1$, $I+\epsilon/4 \approx 1.158$. זה נותן $I \approx 1.211$ ו-$\epsilon \approx -0.211$. אומדן ראשון של הטות בכלל הטרפז עם 16 צעדים הוא $\epsilon/64 \approx 0.003$. ההפרש בין I והקירוב שנמצא בסעיף ב. הוא 0.009, מאותו סדר גודל. כנראה הדיוק של הקירוב מסעיף ב. וכלל הטרפז עם 16 צעדים יהיה די דומה, אבל לא בהכרח.
