בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 | ד"ר יעקוב קרסנוב
מבחן מועד א2', סמסטר א' תשס"ג | פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. אם $f(x)$ גזירה פעמיים אזי

$$f''(x)+2f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)f(x+h)-2f(x)+(1-h)f(x-h)}{h^2}$$

לכן ניתן לעשות קירוב ל-$f''(x)+2f'(x)$ על ידי הנוסחה בצד ימין למעלה, אם h מספר ממשי קטן.

א. אם מפעילים קירוב זה במקרה $f(x)=x^3$ מה תהיה הטעות (כפונקציה של h) ?

ב. אם מפעילים קירוב זה במקרה $f(x)=x^3$ על מחשב שנותן טעויות יחסיות לא יותר מ-ϵ, מה תהיה שגיאת העיגול הכי גדול שאפשר ?

ג. כאשר ב-Matlab או Scilab כותבים

```
x = 1;
h = 10.^[-8 : -1];
(  (1 + h). * (x + h).^3 - 2 * x^3 + (1 - h). * (x - h).^3  )  ./  h.^2
```

מקבלים תשובה

6.6613 12.0348 11.9997 12.0000 12.0000 12.0000 12.0002 12.0200

הסבר, לאור התוצאות שלך מסעיפים א. ו-ב. מה הוא סדר הגודל של ϵ?

א. התשובה המדוייקת כאשר $f(x)=x^3$ היא

$$f''(x)+2f'(x)=6x+6x^2$$

התשובה המקורבת היא

$$\begin{aligned}\frac{(1+h)f(x+h)-2f(x)+(1-h)f(x-h)}{h^2}&=\frac{(1+h)(x+h)^3-2x^3+(1-h)(x-h)^3}{h^2}\\&=\frac{6xh^2+6x^2h^2+2h^4}{h^2}\\&=6x+6x^2+2h^2\end{aligned}$$

כלומר הטעות היא $2h^2$.

ב. שגיאת העיגול בחישוב x^3 היא מסדר גודל ϵx^3. ולכן שגיאת העיגול בחישוב הרלוונחי היא מסדר גודל של $4\epsilon x^3/h^2$.

ג. ל-h'ים היותר גדולים, השגיאה האלגוריתמית היא היותר חשובה, ולפי סעיף א. השגיאה היא $2h^2$. אכן ל-$h = 0.01$ מקבלים שגיאה 0.0002 ול-$h = 0.1$ מקבלים שגיאה 0.02. ל-h'ים היותר קטנים שגיאת העיגול היא היותר חשובה, ולפי סעיף ב. ההתנהגות של שגיאת העיגול היא מסדר גודל $10^{-16}/h^2$. אכן ל-$h = 10^{-6}$ מקבלים שגיאה מסדר גודל 10^{-4}, ל-$h = 10^{-7}$ מקבלים שגיאה מסדר גודל 10^{-2} וכו'.

---

2. א. מצא את נקודות השבת של הרקורסיה

$$x_{n+1} = 1 - \frac{9}{2}x_n^2(1 - x_n)$$

ב. כאשר מפעילים את הרקורסיה עם $x_0 = 0.3$ מקבלים את התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.71650 \\ x_2 &= 0.34507 \\ x_3 &= 0.64908 \\ x_4 &= 0.33470 \\ x_5 &= 0.66461 \\ x_6 &= 0.33335 \\ x_7 &= 0.66664 \\ x_8 &= 0.33333 \\ x_9 &= 0.66667 \\ x_{10} &= 0.33333 \end{aligned}$$

הוכח שלרקורסיה יש מחזור ממחזור (מסדר) 2 בערכים $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. למה הרקורסיה לא מתכנסת לאחת מנקודות השבת?

ג. איך היית מנסח את המושג של התכנסות ריבועית למחזור ממחזור (מסדר) שנים? האם בדוגמה בשאלה זאת ההתכנסות היא ריבועית?

א. נקודות השבת מקיימות

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{9}{2}x^2(1 - x) \\ \Rightarrow 1 - x &= \frac{9}{2}x^2(1 - x) \\ \Rightarrow x &= 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

ב. אם כותבים את הרקורסיה בצורה $x_{n+1}=\phi(x_n)$, מוצאים ש- $\phi(\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$, ו- $\phi(\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$, כלומר יש מחזור ממחזור 2 עם ערכים $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$. יש לנו גם ש-

$$\phi'(x)=\tfrac{9}{2}(2x-3x^2)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\phi'(1)&=-\tfrac{9}{2}=-4.5\\ \phi'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right)&=3(\sqrt{2}-1)\approx 1.2\\ \phi'\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right)&=3(-\sqrt{2}-1)\approx -7.2\end{aligned}$$

ולכן לא ייתכן התכנסות לאף אחד מנקודות השבת שמצאנו בסעיף א.

ג. אפשרות ראשונה: לרקורסיה $x_{n+1}=\phi(x_n)$ יש מחזור ממחזור שניים אם $\phi(a)=b$, $\phi(b)=a$. כלומר $\phi(\phi(a))=a$, $\phi(\phi(b))$. אומרים שההתכנסות למחזור היא ריבועית אם ההתכנסות לנקודות השבת a ו-b של הרקורסיה $x_{n+1}=\phi(\phi(x_n))$ היא ריבועית. היות ו-$\frac{d}{dx}\phi(\phi(x))=\phi'(\phi(x))\phi'(x)$, תנאי הכרחי להתכנסות ריבועית היא ש-$|\phi'(a)\phi'(b)|=$ 0. בדוגמה שלנו $\phi'(\frac{2}{3})=0$.

אפשרות שנייה: אם המחזור הוא a,b, הייתי אומר שההתכנסות ריבועית אם, לדוגמה, כאשר $x=a+\epsilon$, $\phi(\phi(x))\approx a+A\epsilon^2$ עבור איזה שהיא A. בדוגמה שלנו, נסתכל על x_2,x_4,x_6. לפי ההשערה של התכנסות ריבועית

$$x_4-\tfrac{1}{3}=A\left(x_2-\tfrac{1}{3}\right)^2\ ,\qquad x_6-\tfrac{1}{3}=A\left(x_4-\tfrac{1}{3}\right)^2$$

המשוואה הראשונה נותנת $A=9.9$, השנייה נותנת $A=10.7$, ודאי קרובים מספיק.

---

3. א. אם A היא מטריצה ריבועית, מה היא משמעות הפקודה `cond(A,2)` ב-Matlab (או `cond(A)` ב-Scilab)?

ב. אם

$$A=\begin{pmatrix}1.03 & 2.96 & -2.18 & 3.35\\ -3.40 & -7.78 & 0.173 & -2.56\\ 7.79 & 7.77 & 5.16 & 3.03\\ 2.13 & 0.137 & 1.23 & 1.98\end{pmatrix}$$

אזי ל-3 ספרות דיוק

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-584 & -628 & -421 & 820\\ 154 & 166 & 111 & -217\\ 451 & 486 & 326 & -634\\ 337 & 363 & 243 & -473\end{pmatrix}$$

מצא אומדן למספר המצב של A בנורמה 1 (תזכורת: $||A||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$).

ג. אם A היא המטריצה מסעיף ב. ו-x_1, x_2 הם הפתרונות של $Ax_1 = b_1$ ו-$Ax_2 = b_2$, כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} -0.143 \\ 2.12 \\ 2.12 \\ 0.121 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0.144 \\ 2.12 \\ 2.12 \\ 0.121 \end{pmatrix}$$

יוצא של-3 ספרות דיוק $x_1 = x_2$. האם זה מפתיע?

ד. אם A היא המטריצה מסעיף ב. ו-y_1, y_2 הם הפתרונות של $Ay_1 = c_1$ ו-$Ay_2 = c_2$, כאשר

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.493 \\ -0.845 \\ 0.278 \\ -0.154 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 0.495 \\ -0.846 \\ 0.276 \\ -0.155 \end{pmatrix}$$

יוצא ל-3 ספרות דיוק ש-

$$y_1 = \begin{pmatrix} -0.326 \\ 0.199 \\ 0.148 \\ 0.168 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \begin{pmatrix} -0.844 \\ 0.336 \\ 0.547 \\ 0.466 \end{pmatrix}$$

האם זה מפתיע?

א. חישוב מספר המצב של המטריצה $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ בנורמה 2.

ב. בנורמה 1, לחשב את הנורמה של מטריצה לוקחים את הסכום המקסימלי של עמודה של המטריצה (הסכום הוא סכום של רכיבים בערך מוחלט). ולכן בדוגמה שלנו $||A|| \approx 20$ (עמודה שנייה), $||A^{-1}|| \approx 2000$ (עמודה רביעית) ו-$\kappa(A) \approx 4 \times 10^4$. לחשב ליותר מ-2 ספרות דיוק נחשב כטעות! מה שרוצים לדעת הוא סדר גודל של מספר המצב.

ג. אם $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$ אזי

$$\frac{||x_1 - x_2||}{||x_1||} \leq \kappa(A) \frac{||b_1 - b_2||}{||b_1||}$$

אבל, אפילו אם $\kappa(A)$ גדול מאוד, זה לא מחייב שאם b_1 ו-b_2 קרובים, יצא הפרש גדול בין x_1 ו-x_2. לכן התשובה לא מפתיעה.

ד. יש לנו $||c_1 - c_2|| \approx 0.006$, $||c_1|| \approx ||c_2|| \approx 2$, $||y_1 - y_2|| \approx 1.5$, $||y_1|| \approx 0.8$, $||y_2|| > ||y_1||$. יש לנו שגיאה קטנה בקלט, בערך 0.003, ושגיאה גדולה בפלט, בערך 2. אבל היות ו-$\kappa(A) \approx 4 \times 10^4$, זה לא סותר את אי-השוויון

$$\frac{||y_1 - y_2||}{||y_1||} \leq \kappa(A) \frac{||c_1 - c_2||}{||c_1||}$$

והתשובה איננה מפתיעה.

---

4. א. הסבר, בקצרה, את השימוש בפקודה spline ב-Matlab או splin ב-Scilab.
ב. כתוב במפורש את כל התנאים על המקדמים $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ כך ש-

$$s(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\ , & -1 \le x \le 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\ , & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

יהיה natural cubic spline על הקטע $-1 \le x \le 1$, עם הערכים

$$s(-1) = 1, \qquad s(0) = 0, \qquad s(1) = 1$$

פתור את המשוואות שכתבת, למצוא את $s(x)$ במפורש.

א. אם רוצים, לדוגמה, cubic spline העובר דרך הנקודות

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	2	2	1

הייתי קודם כל מייצר שני ווקטורים x, y עם הנתונים על ידי

```
x= [0 1 2 3 4]
y= [1 2 2 2 1]
```

אזי ניתן לקבל את הערכים של ה-spline, לדוגמה בנקודות $0, 0.1, 0.2, \ldots, 3.9, 4$, על ידי

```
yy = spline(x, y, 0 : 0.1 : 4)
```

ב. יש לבדוק את התנאים הבאים: שהפונקציה הראשונה תעבור בנקודות $(-1,1)$ ו-$(0,0)$; שהפונקציה השנייה תעבור בנקודות $(0,0)$ ו-$(1,1)$; ש-$s'(0)$ ו-$s''(0)$ יהיו מוגדרים היטב; וש-$s''(-1) = s''(1) = 0$, התנאי הנוסף ל-spline טבעי. לפי הסדר, תנאים אלה נותנים:

$$\begin{array}{rcr} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 & & s(-1) = 1 \\ a_0 = 0 & & s(0-) = 0 \\ b_0 = 0 & & s(0+) = 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1 & \Leftrightarrow & s(1) = 1 \\ a_1 = b_1 & & s'(0-) = s'(0+) \\ 2a_2 = 2b_2 & & s''(0-) = s''(0+) \\ 2a_2 - 6a_3 = 0 & & s''(-1) = 0 \\ 2b_2 + 6b_3 = 0 & & s''(1) = 0 \end{array}$$

מהמשוואות השלישיות והרביעיות $a_0 = b_0 = 0$. מארבע האחרונות $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $a_3 = \frac{1}{3}a_2$, $b_3 = -\frac{1}{3}a_2$. כלומר, בקלות ניתן לכתוב את הכל במונחים של a_2 ו-a_1. הצבה תוך המשוואה הראשונה והרביעית נותנת

$$a_1 + \tfrac{2}{3}a_2 = 1 \qquad -a_1 + \tfrac{2}{3}a_2 = 1$$

ורואים מיד ש-$a_1 = 0$ ו-$a_2 = 3/2$. ולכן

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3+x)x^2 \ , & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}(3-x)x^2 \ , & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

---

5. נדרש למצוא a, b כך ש-$y_i \approx ae^{bx_i}$ עבור הנתונים הבאים:

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.1	1.4	1.8	2.3	3.0

א. מצא כזה a, b על ידי שימוש בהערה שאם $y_i \approx ae^{bx_i}$ אזי $\ln y_i \approx \ln a + bx_i$, ושימוש בשיטת ריבועים מזעריים (ריבועים זעירים).

ב. האם ה-a, b שמצאת בסעיף א. הם זהים למה שהיית מוצא אם היית דורש ש-

$$S(a,b) = \sum_i \left(y_i - ae^{bx_i}\right)^2$$

יהיה מינימלי? הוכח שה-$S(a,b)$ הזה מינימלי אם ורק אם

$$\begin{aligned} a\sum e^{2bx_i} &= \sum y_i e^{bx_i} \ , \\ a\sum x_i e^{2bx_i} &= \sum x_i y_i e^{bx_i} \end{aligned} \quad .$$

א. לפי הנוסחה הסטנדרטית של ריבועים מזעריים, אם רוצים של $\ln y_i \approx \ln a + bx_i$, בוחרים את a, b לפתור את המשוואות

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \ln a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \ln y_i \\ \sum \ln y_i \end{pmatrix}$$

עם הנתונים שלנו

$$\begin{pmatrix} 7.5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \ln a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.20 \\ 2.95 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ \ln a \end{pmatrix} \approx \frac{1}{12.5} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 7.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.20 \\ 2.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.09 \end{pmatrix}$$

ולפי זה יש לבחור $a \approx 1.1$, $b \approx 0.5$.

ב. הערכים של a, b שקבלנו מסעיף א. נובעים ממינימיזציה של

$$T = \sum \left(\ln y_i - \ln a - bx_i\right)^2 = \sum \left(\ln y_i - \ln(ae^{bx_i})\right)^2$$

לא היינו מצפים לקבל אותו דבר מהמינימיזציה של

$$S = \sum \left(y_i - ae^{bx_i}\right)^2$$

.

$S(a,b)$ הוא מינימלי אם

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_i e^{bx_i}\left(y_i - ae^{bx_i}\right) = -2\left(\sum y_i e^{bx_i} - a\sum e^{2bx_i}\right)$$
$$0 = \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_i ax_i e^{bx_i}\left(y_i - ae^{bx_i}\right) = -2a\left(\sum y_i x_i e^{bx_i} - a\sum x_i e^{2bx_i}\right)$$

---

6. א. איך היית מוצא

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+\sin x}$$

ב-Matlab או Scilab? יש לכתוב במלואן כל הפונקציות ו/או פקודות שהיית משתמש בהם.

ב. כאשר עושים קירובים לאנטגרל בסעיף א. על ידי כלל הטרפז מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר קטעים	קירוב
2	1.107546964
4	1.084256192
8	1.078869027
16	1.077549242

השתמש בשיטת רומברג למצוא קירוב משופר מהתוצאות האלה.

ג. איזה קירוב מקבלים לאנטגרל על ידי שימוש בתרבוע גאוס (Gaussian Quadrature) עם 3 קודקודים ? (הקודקודים: $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, המשקלות $\left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right)$ בהתאם).

א. אם אני עובד ב-matlab 5, הייתי מייצר קובץ בשם `foo.m` עם 2 השורות

```
function y = foo(x)
y = 1./(2 + sin(x))
```

ואז הייתי כותב

$$\texttt{quad8}('\texttt{foo}', -1, 1, 1\texttt{e}-10)$$

(לקבל דיוק של חלק 1 ב-10^{10}).

ב. טבלת רומברג:

2	1.107546964			
4	1.084256192	1.076492601		
8	1.078869027	1.077073305	1.077112019	
16	1.077549242	1.077109314	1.077111715	1.077111710

הרכיב האחרון בטבלה הוא הקירוב המשופר.

ג.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+\sin x}\approx\frac{5}{9}\frac{1}{2+\sin\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}+\frac{8}{9}\frac{1}{2+\sin 0}+\frac{5}{9}\frac{1}{2+\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}=1.0774118$$